第 30 卷　第 6 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 30　No. 6
2009 年 11 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Nov. 2009

文章编号:　1000-5013(2009)06-0718-02

某些调和单叶函数的稳定性及系数估计

林珍连

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要:　利用线性连接区域作为工具, 研究单位圆盘上的复值调和函数 $f = h + \overline{g}$, 证明 $h + \beta e^{i\theta} g$ 及 $h + \beta e^{i\theta}\overline{g}$ 具有单叶性, 其中 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\theta \in \mathbf{R}$. 据此, 证明某些调和单叶映射在特定条件下的系数估计猜想 $||a_n^0| - |a_{-n}^0|| \leqslant n$, $n = 2, 3, \cdots$, 是真的.

关键词:　调和单叶函数; 线性连接区域; 稳定性; 系数估计

中图分类号:　O 174.55　　　文献标识码:　A

1　预备知识

假设 $f(z)$ 是单位圆盘 D 上的上的复值调和函数, 则 $f(z)$ 可写成 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, 其中 $h(z)$ 和 $g(z)$ 是 D 上的解析函数. 文[1] 证明了 f 局部单叶的充要条件是 $J_f > 0$, 即 $h'(z) \neq 0$, 且特征 $\omega(z) = g'/h'$ 满足 $|\omega(z)| < 1$, $z \in D$. 文[2] 讨论单位圆盘 D 内的调和单叶函数的一些基本性质, 如偏差性质、系数估计及调和单叶函数子类的一些性质, 并提出了猜想[3-5]. 即

$$||a_n^0| - |a_{-n}^0|| \leqslant n, \qquad n = 2, 3, \cdots \tag{1}$$

一个区域 $\Omega \subset C$ 称为线性连接的, 如果存在一个常数 $M < \infty$, 使得对任意 $w_1, w_2 \in \Omega$ 可用一条长度 $l(\gamma) \leqslant M|w_1 - w_2|$ 的路径 γ 来连接. 文[6] 研究了判别调和函数的单叶性问题, 得到了如下定理.

定理 A　设 $h: D \to \mathscr{C}$ 是一单叶解析函数, 则存在常数 $C > 0$, 使得每一个具有 $|\omega| < C$ 的调和函数 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 单叶的充要条件是 $h(D)$ 为线性连接区域.

定理 B　设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 是 D 上保向的调和单叶映射, 且 $f(D)$ 是 M 线性连接区域, 若 $|\omega| < 1/M + 1$, 那么 $h(z)$ 单叶.

定理 C　设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 是 D 上保向的调和单叶映射, 且 $f(D)$ 是 M 线性连接区域, 要是 $|\omega| < 1/2M + 1$, 则 $f(z) = h(z) + e^{i\theta}\overline{g(z)}$, $\theta \in \mathbf{R}$ 单叶.

1　主要结论及其证明

定理 1　设 $h: D \to \mathscr{C}$ 是一单叶解析函数, $h(D)$ 是线性连接区域, 则存在常数 $C > 0$, 使得满足 $|\omega| < C$ 的每一个调和函数 $h(z) + \beta e^{i\theta}\overline{g(z)}$, $h(z) + \beta e^{i\theta} g(z)$ 在 D 上单叶. 其中, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\theta \in \mathbf{R}$.

证明　设 $\Omega = h(D)$ 是 M 线性连接区域, $|\omega| = |g'/h'| < 1/M$, 令 $\varphi = g \circ h^{-1}$, 则 $|\phi| < 1/M$. $h(z) + \beta e^{i\theta}\overline{g(z)}$ 在 D 上单叶等价于 $w + \beta e^{i\theta}\overline{\varphi(w)}$ 在 $h(D)$ 上单叶. 其中, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\theta \in \mathbf{R}$.

反证法. 对 $w_1 \neq w_2$, 有 $\beta e^{i\theta}\overline{\varphi(w_2) - \varphi(w_1)} = w_1 - w_2$; 但另一方面有

$$|\beta e^{i\theta}\overline{\varphi(w_2) - \varphi(w_1)}| = |\beta||\varphi(w_2) - \varphi(w_1)| \leqslant |\varphi(w_2) - \varphi(w_1)|. \tag{2}$$

设 $\gamma \subset \Omega$ 是连接 w_1, w_2 的, 且长度 $l(\gamma) \leqslant M|w_1 - w_2|$ 的任一条路径, 那么有

$$|\varphi(w_2) - \varphi(w_1)| \leqslant \int_\gamma |\phi(w)||dw| = 1/M\int_\gamma |dw| \leqslant |w_1 - w_2|. \tag{3}$$

式(2), (3) 有矛盾, 要证明 $h + \beta e^{i\theta} g(z)$ 单叶, 只要 $\overline{g}$ 改为 g, $\overline{\varphi}$ 改为 φ 即可.

收稿日期:　2008-11-23

通信作者:　林珍连(1970-), 女, 讲师, 主要从事函数论的研究. E-mail: zhenlian@hqu.edu.cn.

基金项目:　华侨大学科研基金资助项目(07HZR03, 09HZR23)

在定理条件下可以证明 $f(D)$ 也是线性连接的, 其中 $f = h + \beta e^{i\theta}\overline{g}$.

推论 1　设 $f = h + \overline{g} \in S_H$ (或 S_H^0), $h: D \to \mathscr{C}$ 是一单叶解析函数, $h(D)$ 是线性连接区域, 则存在常数 $C > 0$, 使得满足 $|\omega| < C$ 的 $h(z) + \beta e^{i\theta}\overline{g(z)}$ 和 $h(z) + \beta e^{i\theta} g(z)$ 在 D 上单叶. 其中, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\theta \in \mathbf{R}$

定理 2　设 $f_0 \in S_H^0$, h_0 是 D 上一单叶解析函数, $h_0(D)$ 是线性连接区域, 存在常数 $C > 0$, 当 $|\omega| < C$ 时, 有如下两个系数估计: (1) $||a_n^0| - |a_{-n}^0|| \leqslant n (n = 2, 3, \cdots)$; (2) $|a_n^0| \leqslant n (n = 1, 2, 3, \cdots)$.

证明　从推论 1 可知, $h_0(z) + \beta e^{i\theta} g_0(z)$ 在 D 上单叶. 其中, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\theta \in \mathbf{R}$ 由伯巴赫猜想可知, 如果有 $z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n \in S$[4], 则有 $|c_n| \leqslant n (n = 2, 3, \cdots)$. 于是, 有 $|a_n^0 + \beta e^{i\theta}\overline{a_{-n}^0}| \leqslant n (n = 2, 3, \cdots)$. 取 $\beta = 1$, 即有 $||a_n^0| - |a_{-n}^0|| \leqslant n (n = 2, 3, \cdots)$, 而由 $h_0(z)$ 是单叶性, 可得 $|a_n| \leqslant n (n = 1, 2, \cdots)$.

如果取 $\beta = 1$, $\theta = 2\arg a_{-n}^0$, 即有 $|a_n^0 + a_{-n}^0| \leqslant n (n = 2, 3, \cdots)$, 应用文[2] 的系数关系不等式 $\dfrac{|a_n + a_{-n}|}{1 + |a_{-1}|} \leqslant a_n^0 + a_{-n}^0 \leqslant \dfrac{|a_n + a_{-n}|}{1 - |a_{-1}|}$, 可得到如下定理.

定理 3　设 $f = h + \overline{g} \in S_H$, $h: D \to \mathscr{C}$ 是一单叶解析映射, $h(D)$ 是线性连接区域, 则存在常数 $C > 0$. 当 $|\omega| < C$ 时, 有如下两个系数估计: (1) $|a_n + a_{-n}| \leqslant (1 + |a_{-1}|) n (n = 2, 3, \cdots)$; (2) $|a_n| \leqslant n (n = 1, 2, 3, \cdots)$.

定理 4　假设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 是 D 上的保向的调和单叶映射, $f(D)$ 是 M 线性连接区域. 如果 $|\omega| < C$, $\dfrac{1}{(1 + M)^2} < c < \dfrac{1}{M + 1}$, 则 $h(z) + \beta e^{i\theta}\overline{g(z)}$ 及 $h(z) + \beta e^{i\theta} g(z)$ 在 D 上单叶. 其中, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\theta \in \mathbf{R}$.

证明　由定理 B 可知 h 是单叶的, 且 $h(D)$ 是 $M/[1 - c(1 + M)]$ 线性连接区域[6], 由定理 1 证明过程, 即可知命题成立.

推论 2　在定理 3 的条件下, 当 $f \in S_H^0$ 时, 可得如下两个系数估计: (1) $||a_n^0| - |a_{-n}^0|| \leqslant n (n = 2, 3, \cdots)$; (2) $|a_n^0| \leqslant n (n = 1, 2, 3, \cdots)$. 当 $f = h + \overline{g} \in S_H$ 时, 则可得如下两个系数估计: (1) $|a_n + a_{-n}| \leqslant (1 + |a_{-1}|) n (n = 2, 3, \cdots)$; (2) $|a_n| \leqslant n (n = 1, 2, 3, \cdots)$.

参考文献:

[1] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Bull Amer Math Soc, 1936, 42(10): 689-692.

[2] CLUNIE J, SHEIL-SMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math, 1984(9): 3-25.

[3] 吴瑞溢, 黄心中. 单叶调和函数的稳定性[J]. 漳州师范学院学报: 自然科学版, 2007, 20(2): 11-15.

[4] POMMERENKE C H. 单叶函数[M]. 杨维奇, 译. 北京: 科学出版社, 1984.

[5] 黄心中. 给定复伸张单叶调和映照的面积偏差[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2007, 28(2): 208-211.

[6] CHUAQUI M, HERNÀNDEZ R. Harmonic univalent mappings and linearly connected domain[J]. J Math Anal Appl, 2007, 332(2): 1189-1194.

The Stability and Coefficient Estimates for Some Harmonic Univalent Mappings

LIN Zhen-lian

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, the linearly connected domains are used as a tool to prove the functions $h + \beta e^{i\theta} g$ and $h + \beta e^{i\theta}\overline{g}$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\theta \in \mathbf{R}$ to be univalent for the harmonic complex function $f = h + \overline{g}$ in the unit disk. On this basis, the conjucture of coefficient estimates $||a_n^0| - |a_{-n}^0|| \leqslant n$, $n = 2, 3, \cdots$, for some harmonic univalent functions under specific conditions are proved to be correct.

Keywords: harmonic univalent function; linearly connected domain; stability; coefficient estimate

(责任编辑: 陈志贤　　英文审校: 张金顺, 黄心中)