第 30 卷　第 6 期　　华 侨 大 学 学 报 (自 然 科 学 版)　　Vol. 30　No. 6
2009 年 11 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Nov.　2009

文章编号:　1000-5013(2009) 06-0715-03

无限差集类的性质及其应用

徐 卫忠, 陈尔明

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要:　研究由 Z_+ 的子集族 $\mathscr{F}$ 生成的无限差集类 $\varphi_{\mathscr{F}-\Delta} = \{S - S \mid S \in \mathscr{F}\}$, 其对偶族 $\mathscr{K}_{\mathscr{F}-\Delta}$, 以及族 $\overline{\mathscr{F}} = \{S \in \mathscr{P} \mid S - S \in \mathscr{F}\}$ 的性质, 给出它们在平移负不变条件下的关系, 并讨论它们在动力系统研究中的应用.

关键词:　无限差集类; 族; 对偶族; 拓扑可迁; 平移不变

中图分类号:　O 189. 3　　　　文献标识码:　A

文[1-3] 讨论了无限差集并得到了一些重要结果. 在此基础上, 本文继续讨论无限差集的性质, 并探讨它们的性质在动力系统研究中的应用.

1　定义和记号

总约定 (X, d) 为紧致度量空间, $f: X \to X$ 为连续满射.

令 Z_+ 表示非负整数集合, P 表示 Z_+ 的幂集, $P_+ = P / \{\emptyset\}$, P 的子集称为 (Z_+ 的) 子集类. 若 φ 为一子集类, 其对偶为

$$\kappa_\varphi = \{F \in P \mid \text{对于 } \forall F_1 \in \varphi,\ F_1 \cap F \neq \emptyset\}.$$

显然, 若 $\varphi_1 \subset \varphi_2$, 则 $\kappa_{\varphi_1} \supset \kappa_{\varphi_2}$. 如 $\mathscr{F}$ 为一子集类且满足: 若 $F_2 \supset F_1$, 且 $F_1 \in \mathscr{F} \Rightarrow F_2 \in \mathscr{F}$, 则称 $\mathscr{F}$ 为一子集族.

易见, 若 φ 为子集类, 则 κ_φ 必为子集族. 若 $\mathscr{F}$ 为一族, 对于 $\forall F \in \mathscr{F}$, $\forall i \in Z_+$; 如有

$$g^i(F) = \{i + j \mid j \in F\} \in \mathscr{F},$$

则称 $\mathscr{F}$ 是平移正不变的; 而如有

$$g^{-i}(F) = \{j \in Z^+ \mid i + j \in F\} \in \mathscr{F},$$

则 $\mathscr{F}$ 称是平移负不变的; 如 $\mathscr{F}$ 既是平移正不变的, 又是平移负不变的, 则 $\mathscr{F}$ 称是平移不变的.

令 $T\mathscr{F} = \{F \mid \text{对 } Z_+ \text{ 的任意有限子集} \{i_1, i_2, \cdots, i_k\},\ g^{-i_1}(F) \cap \cdots \cap g^{-i_k}(F) \in \mathscr{F}\}$. 记 B 为 Z_+ 的无限子集族, 称 TB 为厚集族, KB 为有限余子集族, KTB 为 Syndetic 集族. 记 D 为 Z_+ 的下 Banach 密度[2] 为 1 的子集族, 则 KD 为正上 Banach 密度[2] 的子集族. 记 D^+ 为 Z_+ 的正上密度子集族, 则 KD^+ 为下密度为 1 的集族[4]. B, KB, TB, KTB, D^+, KD^+ 都是平移不变族.

若 A 为 P 的任一子集, 记 $[A] = \{F \in P \mid \text{对于某个 } S \in A,\ F \supset S\}$ 为 A 生成的族.

若 $S = \{n_i \mid i_1 < i_2 < \cdots\} \in B$, 称 $S - S = \{n_j - n_i \mid i < j\}$ 为无限差集, 则称 $\varphi_\Delta = \{S - S \mid S \in B\}$ 为无限差集类.

若 $\mathscr{F}$ 为一子集族, 称 $\varphi_{\mathscr{F}-\Delta} = \{S - S \mid S \in \mathscr{F}\}$ 为相对于族 F 的无限差集类.

显然, 若 $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$, 则 $\varphi_{\mathscr{F}_1-\Delta} \subset \varphi_{\mathscr{F}_2-\Delta}$, $[\varphi_{\mathscr{F}_1-\Delta}] \subset [\varphi_{\mathscr{F}_2-\Delta}]$.

若 $\mathscr{F}$ 为 Z_+ 的真子集族, 记 $\overline{\mathscr{F}} = \{S \in P \mid S - S \in \mathscr{F}\}$.

若 $\varphi \subset P_+$, U, V 为 X 的任意非空开集, 则有

收稿日期:　2007-12-09

通信作者:　陈尔明(1951-) , 男, 教授, 主要从事动力系统和分形几何的研究. E-mail: erming_chen@hotmail.com.

基金项目:　福建省自然科学基金资助项目(S0650017)

$$N_f(U,V)=\{n\in Z_+\mid f^{-n}(U)\cap V\neq\varnothing\}\neq\varphi,$$

称(X,f)为 φ可迁的, 若对于 X 的任意非空开集 U, $N_f(U,U)\in\varphi$, 则称(X,f)为 φ中心的.

2 主要结论和证明

引理 1 对任意 $S=\{n_i\mid n_1<n_2<\cdots\}\in B$, $S-S\subset(S-S)-(S-S)$.

证明 设 $S=\{n_i\mid n_1<n_2<\cdots\}\in B$, 则 $S-S=\{n_j-n_i\mid i<j\}\in B$. 对$\forall i<j$, $n_j-n_i\in S-S$, 若 $i>1$, 有 $n_i-n_1\in S-S$, 且 $n_j-n_i=(n_j-n_1)-(n_i-n_1)\in(S-S)-(S-S)$; 若 $i=1$, 即 $n_j-n_1\in S-S(j>1)$. 显然, $n_{j+1}-n_1\in S-S$, $n_{j+1}-n_j\in(S-S)$, 且 $n_{j+1}-n_j<n_{j+1}-n_1$. 故 $n_j-n_1=(n_{j+1}-n_1)-(n_{j+1}-n_j)\in(S-S)-(S-S)$. 证毕.

引理 2[1] 若 $\mathscr{F}$为一族, 则 $KK\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}=[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]$, $K\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}=K[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]$.

定理 1 若 $\mathscr{F}$为 Z_+ 的真子集族, 则 $\overline{\mathscr{F}}$为平移正不变真族, 且 $\overline{\mathscr{F}}\subset\overline{\overline{\mathscr{F}}}$.

证明 由文[1]可知, $\overline{\mathscr{F}}$为平移正不变真族. 现只证 $\overline{\mathscr{F}}\subset\overline{\overline{\mathscr{F}}}$.

对$\forall S\in\overline{\mathscr{F}}$, $S-S\in\mathscr{F}$, 由引理 1 可知, $(S-S)-(S-S)\supset S-S\in\mathscr{F}$. 又 $\mathscr{F}$为族, $(S-S)-(S-S)\in\mathscr{F}$, 从而 $S-S\in\overline{\mathscr{F}}$. 所以, $S\in\overline{\overline{\mathscr{F}}}$得证.

定理 2 若 $\mathscr{F}$为平移负不变真族, 则 $\mathscr{F}\subset\overline{\mathscr{F}}$, $[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]\subset[\varphi_{\overline{\mathscr{F}}-\Delta}]\subset[\varphi_{\overline{\overline{\mathscr{F}}}-\Delta}]\subset\overline{\mathscr{F}}$.

证明 对 $\forall S\in\mathscr{F}$, 设 $S=\{n_i\mid i_1<i_2<\cdots\}$, 则 $S-S\supset\{n_i-n_1\mid i=2,3,\cdots\}\in\mathscr{F}$. 又 F 为族, 故 $S-S\in\mathscr{F}$, $S\in\overline{\mathscr{F}}$, 所以 $\mathscr{F}\subset\overline{\mathscr{F}}$. 由 $\mathscr{F}\subset\overline{\mathscr{F}}\subset\overline{\overline{\mathscr{F}}}$得 $[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]\subset[\varphi_{\overline{\mathscr{F}}-\Delta}]\subset[\varphi_{\overline{\overline{\mathscr{F}}}-\Delta}]$, 又由文[1]知, 若 $\mathscr{F}$为 Z_+ 的真子集族, 则 $[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]\subset\mathscr{F}$, 由定理 1 知 $\overline{\mathscr{F}}$为 Z_+ 的真子集族, 所以 $[\varphi_{\overline{\overline{\mathscr{F}}}-\Delta}]\subset\overline{\overline{\mathscr{F}}}$.

注 1 由定理 2 的证明过程可知, 若 $\mathscr{F}$为平移负不变真族, 则若 $S\in\mathscr{F}$, 有 $S-S\in\mathscr{F}$. 另由文[1]可知, $[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]\subset\mathscr{F}\subset\overline{[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]}$; 若 $\mathscr{F}$为平移负不变族, 则$[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]\subset\mathscr{F}$; 若 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$, 则 $\overline{\mathscr{F}_1}\subset\overline{\mathscr{F}_2}$. 由此可得

定理 3 若 $\mathscr{F}$为平移负不变真族, 则

(1) $[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]\subset[\varphi_{\overline{\mathscr{F}}-\Delta}]\subset\mathscr{F}\subset\overline{[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]}\subset\overline{[\varphi_{\overline{\mathscr{F}}-\Delta}]}=\overline{\mathscr{F}}\subset\overline{\overline{[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]}}\subset\overline{\overline{\mathscr{F}}}$.

(2) $K\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}\supset K\varphi_{\overline{\mathscr{F}}-\Delta}\supset K\mathscr{F}\supset K\overline{[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]}\supset K\overline{[\varphi_{\overline{\mathscr{F}}-\Delta}]}=K\overline{\mathscr{F}}\supset K\overline{\overline{[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]}}\supset K\overline{\overline{\mathscr{F}}}\supset[\varphi_{\overline{K\mathscr{F}}-\Delta}]$.

(3) $K\overline{[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]}\cup[\varphi_{\overline{K\mathscr{F}}-\Delta}]\subset K\mathscr{F}\subset\overline{[\varphi_{K\mathscr{F}-\Delta}]}\cap K\varphi_{\overline{\mathscr{F}}-\Delta}$.

证明 性质(2)由性质(1)结合引理 2 立即可得. 由文[1]可知, $[\varphi_{K\overline{\mathscr{F}}-\Delta}]\subset K\mathscr{F}\subset K\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}$, 故性质(3)可由性质(2)轻松得到.

现证性质(1). 其中, $[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]\subset[\varphi_{\overline{\mathscr{F}}-\Delta}]\subset\mathscr{F}\subset\overline{[\varphi_{\overline{\mathscr{F}}-\Delta}]}\subset\overline{[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}}$显然成立.

由 $\mathscr{F}\subset\overline{[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]}\subset\overline{\mathscr{F}}$可知, $\overline{\mathscr{F}}\subset\overline{\overline{[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}]}}\subset\overline{\overline{\mathscr{F}}}$成立, 故只需证$\overline{[\varphi_{\overline{\mathscr{F}}-\Delta}]}=\overline{\mathscr{F}}$. 由$[\varphi_{\overline{\mathscr{F}}-\Delta}]\subset\mathscr{F}$可知, $\overline{[\varphi_{\overline{F}-\Delta}]}\subset\overline{\mathscr{F}}$; 对$\forall S\in\overline{\mathscr{F}}$, $S-S\in\varphi_{\overline{\mathscr{F}}-\Delta}$, 则 $S-S\in[\varphi_{\overline{\mathscr{F}}-\Delta}]$, 从而有 $S\in\overline{[\varphi_{\overline{\mathscr{F}}-\Delta}]}$, 所以, $\overline{\mathscr{F}}\subset\overline{[\varphi_{\overline{\mathscr{F}}-\Delta}]}$.

注 2 因为 τB, KB, $K\tau B$, D^+, KD^+ 都是平移负不变真族, 故将 $\mathscr{F}=\tau B, KB, K\tau B, D^+, KD^+$ 分别代入定理 3 中, 并结合 $\tau B\subset[\varphi_\Delta]$, $KB\subset D\subset KD^+$, 以及 $\varphi_{B-\Delta}=\varphi_{KB-\Delta}=\{N\}$, 可得,

推论 1 (1) $[N]\subset[\varphi_{\overline{\tau B}-\Delta}]\subset\tau B\subset\overline{[N]}\subset\overline{\tau B}\subset\overline{\overline{\tau B}}$, $K\overline{\overline{\tau B}}\subset K\overline{[N]}\subset K\tau B\subset K\varphi_{\overline{\tau B}-\Delta}$,

$K\varphi_\Delta\cup K\overline{[N]}\cup[\varphi_{\overline{K\tau B}-\Delta}]\subset K\tau B\subset\overline{[\varphi_{K\tau B-\Delta}]}\cap K[\varphi_{\overline{\tau B}-\Delta}]$;

(2) $[N]\subset[\varphi_{\overline{KB}-\Delta}]\subset KB\subset\overline{[N]}\subset\overline{KB}\subset\overline{\overline{KB}}$;

(3) $[\varphi_{K\tau B-\Delta}]\subset[\varphi_{\overline{K\tau B}-\Delta}]\subset K\tau B\subset\overline{[\varphi_{K\tau B-\Delta}]}\subset\overline{K\tau B}\subset\overline{\overline{K\tau B}}$;

(4) $[\varphi_{D^+-\Delta}]\subset[\varphi_{\overline{D^+}-\Delta}]\subset D^+\subset\overline{[\varphi_{D^+-\Delta}]}\subset\overline{D^+}\subset\overline{\overline{D^+}}$,

$K\overline{D^+}\subset K\overline{[\varphi_{D^+-\Delta}]}\subset KD^+\subset K\varphi_{\overline{D^+}-\Delta}\subset K\varphi_{D^+-\Delta}$;

(5) $[N]\subset[\varphi_{D-\Delta}]\subset[\varphi_{KD^+-\Delta}]\subset[\varphi_{\overline{KD^+}-\Delta}]\subset KD^+\subset\overline{[\varphi_{KD^+-\Delta}]}\subset\overline{KD^+}$.

定理 4 (1) $KB\subset D\subset\tau K\tau B\subset\tau B\subset[\varphi_\Delta]\subset\overline{[\varphi_\Delta]}=B$.

(2) $B\supset KD\supset K\tau K\tau B\supset K\tau B\supset K\varphi_\Delta\supset KB\cup[\varphi_{KD-\Delta}]\supset KB\cup[\varphi_{K\tau B-\Delta}]$.

证明 对于定理 4 的(1), 由文[1]可知, $KB\subset D\subset\tau K\tau B\subset\tau B\subset[\varphi_\Delta]\subset B$, 因此只需证$\overline{[\varphi_\Delta]}=B$. 对$\forall S\in B$, $S-S\in\varphi_\Delta\subset[\varphi_\Delta]$, 从而 $S\in\overline{[\varphi_\Delta]}$, 所以, 有 $B\subset\overline{[\varphi_\Delta]}$. 又显然$\overline{[\varphi_\Delta]}\subset\overline{B}=B$, 所以, 有$\overline{[\varphi_\Delta]}=B$.

对定理 4 的(2), $B\supset KD\supset K\tau K\tau B\supset K\tau B\supset K\varphi_\Delta\supset KB$ 是定理 4 的(1)的对偶形式. 由文[2]可以知

道, $\varphi_\Delta \subset K\varphi_{KD-\Delta}$, 所以 $K\varphi_\Delta \supset KK\varphi_{KD-\Delta} = [\varphi_{KD-\Delta}]$(引理 2), 又 $D \subset \tau B$, $KD \supset K\tau B$, 所以, 定理 4 的(2)中余下部分得证.

定理 5　若 $\mathscr{F}$ 为一子集族, 则 $[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}] \subset [\varphi_\Delta] = [\varphi_{\overline{[\varphi_\Delta]}-\Delta}]$.

证明　由定理 4 立得.

注 3　由定理 3 知, 若 $\mathscr{F}$ 为平移负不变族, 则 $[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}] \subset \mathscr{F} \subset \overline{\mathscr{F}}$. 在定理 5 中令 $F = [\varphi_\Delta]$, 结合定理 4, 可得 $[\varphi_{[\varphi_\Delta]-\Delta}] \subset [\varphi_\Delta] \subset \overline{[\varphi_\Delta]}$ 成立. 但 $[\varphi_\Delta]$ 不为平移负不变族.

这是由于 $S = \{2n \mid n \in Z_+\} \in B$, $S = S - S \in [\varphi_\Delta]$. 但 $g^{-1}(S) = \{2n-1 \mid n \in Z_+\}$, 不存在 $S_1 \in B$, 使 $g^{-1}(S) \supset S_1 - S_1$(因为 Z_+ 的无限子集中必定包含有相同奇偶性的数, 故 $S_1 - S_1$ 必包含有一个偶数, 但 $g^{-1}(S)$ 显然不含任何偶数), 从而 $g^{-1}(S) \notin [\varphi_\Delta]$. 所以, F 为平移负不变族是 $[\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}] \subset \mathscr{F} \subset \overline{\mathscr{F}}$ 的充分非必要条件.

3　应用举例

例 1　拓扑混合(KB 可迁) $\Rightarrow D$ 可迁 $\Rightarrow \tau K\tau B$ 可迁 $\Rightarrow$ 拓扑弱混合(τB 可迁) $\Rightarrow [\varphi_\Delta]$ 可迁 $\Rightarrow$ 拓扑可迁(B 可迁), (X, f) 拓扑可迁 $\Rightarrow (X, f)$ 为 $[\varphi_\Delta]$ 中心可迁 $\Rightarrow (X, f)$ 与 $K\varphi_\Delta$ 可迁系统弱不连结(由文[1]引理 2) $\Rightarrow (X, f)$ 与 KB 可迁系统弱不连结, 即拓扑混合系统与其本身弱不连结.

证明　由文[1]的定理 1 证明过程可知, (X, f) 拓扑可迁蕴含着 (X, f) 为 $[\varphi_\Delta]$ 中心可迁. 其余部分可由定理 4 得证.

例 2　拓扑混合(KB 可迁) 蕴含着 $K\varphi_\Delta$ 可迁, 即蕴含着拓扑强遍历($K\tau B$ 可迁), $K\tau K\tau B$ 可迁, Banach 可迁(KD 可迁), 从而拓扑可迁. 拓扑弱混合(τB 可迁) 蕴含着 $\overline{\tau B}$ 可迁, 从而 $\overline{\overline{\tau B}}$ 可迁.

证明　由定理 4 和推论 1 可证.

参考文献:

[1]　杨润生. 无限差集类及其应用[J]. 数学学报, 2005, 48(3): 457-464.

[2]　FURSTENBERG H. Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory[M]. Princeton: Princeton University Press, 1981.

[3]　WEISS B. Single orbit dynamics[M]. Providence: AMS Bookstore, 2000.

[4]　YANG Run-sheng. Topological ergodic maps[J]. Acta Math Sinica, 2001, 44(6): 1063-1068.

Characters of Infinite Difference Sets and Its Application

XU Wei-zhong, CHEN Er-ming

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract:　Let $\mathscr{F}$ be a family for Z_+, $\mathscr{F}$ generate a collection of infinite difference sets $\varphi_{\mathscr{F}-\Delta} = \{S - S \mid S \in \mathscr{F}\}$. In this paper, we study the properties of $\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}$ and its dual family $\mathscr{K}\varphi_{\mathscr{F}-\Delta}$ and the family $\overline{\mathscr{F}} = \{S \in \mathscr{P} : S - S \in \mathscr{F}\}$, figure out their relations under the translation minus invariant conditions, and discuss their application in topological dynamics.

Keywords:　collection of infinite difference sets; family; dual family; topological transitive; translation invariant

(责任编辑: 鲁　斌　　英文审校: 张金顺, 黄心中)