第 30 卷　第 6 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 30　No. 6
2009 年 11 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Nov. 2009

文章编号: 1000-5013(2009)06-0709-06

一类具有偏差变元的二阶泛函微分方程周期解

余志炜, 王全义

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 利用重合度理论, 研究一类具有偏差变元的二阶微分方程 $x''+f(t,x'(t))+g(t,x(t-\tau(t)))=p(t)$ 的周期解的存在性问题. 其中, $f,g\in C(\mathbf{R}\times\mathbf{R},\mathbf{R})$, 且对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $g(t+\omega,x)=g(t,x)$, $p\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$, $\tau\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 是 ω 周期的. 在不要求对所有的 $y\in\mathbf{R}$, 函数 $f(t,y)\leqslant 0$ $(f(t,y)\geqslant 0)$, $t\in\mathbf{R}$ 的情况下, 得到该类方程至少存在一个 ω 周期解的充分条件.

关键词: 泛函微分方程; 周期解; 重合度; 偏差变元

中图分类号: O 175.14　　文献标识码: A

近几年, 由于微分方程广泛的应用背景, 有关微分方程特别是二阶微分方程的周期解问题受到了国内外许多作者的关注[1-8]. 文[7]研究了具有偏差变元的 Rayleigh 方程, 即

$$x''+f(x'(t))+g(t,x(t-\tau(t)))=p(t). \tag{1}$$

通过利用重合度理论, 得到了方程(1)至少存在一个周期解的充分条件. 文[7]中要求对所有的 $y\in\mathbf{R}$, 函数 $f(y)\leqslant 0$ 或 $f(t)\geqslant 0$. 对于更为一般的具有偏差变元的二阶微分方程, 即

$$x''+f(t,x'(t))+g(t,x(t-\tau(t)))=p(t) \tag{2}$$

的周期解的存在性问题. 其中, $f,g\in C(\mathbf{R}\times\mathbf{R},\mathbf{R})$, 且对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $g(t+\omega,x)=g(t,x)$, $p\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$, $\tau\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 是 ω 周期的. 函数 f 中显含 t 这类问题还很少人研究过. 本文利用重合度理论, 来研究具有偏差变元的二阶非线性微分方程(2)的周期解的存在性问题.

1　一些引理

先引入重合度理论中的连续性引理.

设 X,Y 是赋范向量空间, L: $\mathrm{Dom}\,L\subset X\to Y$ 为线性映射, N: $X\to Y$ 是连续映射. 若 $\dim\mathrm{Ker}\,L=\mathrm{co}\dim\mathrm{Im}\,L<+\infty$, 且 $\mathrm{Im}\,L$ 为 Y 中闭子集, 则称 L 是指标为零的 Fredholm 映射. 若 L 是指标为零的 Fredholm 映射, 且存在连续投影 P: $X\to X$ 及 Q: $Y\to Y$, 使得 $\mathrm{Im}\,P=\mathrm{Ker}\,L$, $\mathrm{Im}\,L=\mathrm{Ker}\,Q=\mathrm{Im}(I-Q)$, $X=\mathrm{Ker}\,L\oplus\mathrm{Ker}\,P$ 和 $Y=\mathrm{Im}\,L\oplus\mathrm{Im}\,Q$, 则 $L|_{\mathrm{Dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P}$: $\mathrm{Dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P\to\mathrm{Im}\,L$ 是可逆的.

设逆映射为 K_P, Ω 为 X 中的有界开集, 若 QN: $\overline{\Omega}\to Y$ 与 $K_P(I-Q)N$: $\overline{\Omega}\to X$ 都是紧的, 则称映射 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L-紧的. 由于 $\mathrm{Im}\,Q$ 与 $\mathrm{Ker}\,L$ 同构, 因而存在同构映射 J: $\mathrm{Im}\,Q\to\mathrm{Ker}\,L$.

引理 1[9]　设 Ω 是 X 中的有界开集, L: $\mathrm{Dom}\,L\subset X\to Y$ 是指标为零的 Fredholm 映射, N: $X\to Y$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L-紧的. 假设

(1) 对任意的 $\lambda\in(0,1)$, 方程 $Lx=\lambda Nx$ 的解满足 $x\notin\partial\Omega$;

(2) 对任意的 $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L$, $QNx\neq 0$;

(3) Brouwer 度 $\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,0\}\neq 0$, 则方程 $Lx=Nx$ 在 $\mathrm{Dom}\,L\cap\overline{\Omega}$ 内至少存在一个解.

假设有

$$X=\{x\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}):\ x(t+\omega)=x(t)\},$$

收稿日期: 2008-10-12

通信作者: 王全义(1955-), 男, 教授, 主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究. E-mail: qywang@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(Z0511026)

$$Y=\{x\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}):x(t+\omega)=x(t)\}.$$

定义范数 $\|x\|_0=\max_{t\in[0,\omega]}|x(t)|$, $\|x\|_1=\max\{\|x\|_0,\|x'\|_0\}$, 并记

$$|x|_2=\left(\int_0^\omega|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2},$$

则$(X,\|\cdot\|_1)$和$(Y,\|\cdot\|_0)$都是 Banach 空间. 定义线性算子 L 和连续映射 N 为

$$L:\ \mathrm{Dom}\,L\to Y,\qquad Lx=X''.\tag{3}$$

其中, $x\in\mathrm{Dom}\,L=C_\omega^2=\{x\in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R}):x(t+\omega)=x(t)\}$. 则有

$$N:X\to Y,\qquad Nx=-f(t,x'(t))-[g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)],\qquad x\in X.\tag{4}$$

显然, $\mathrm{Ker}\,L=\mathbf{R}$, $\mathrm{Im}\,L=\{y\in Y,\int_0^\omega y(t)\mathrm{d}t=0\}$ 是 Y 中的闭子集, 且 $\dim\mathrm{Ker}\,L=1=\mathrm{co}\dim\mathrm{Im}\,L<+\infty$. 因此, 算子 L 是指标为零的 Fredholm 映射.

定义投影 $P:X\to\mathrm{Ker}$ 和 $Q:Y\to Y$ 为

$$Px=x(0)=x(\omega),\qquad\forall x\in X,\tag{5}$$

$$Qy=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega y(t)\mathrm{d}t.\qquad\forall y\in Y.\tag{6}$$

易见 P,Q 是连续投影, 且满足

$$\mathrm{Im}\,P=\mathrm{Ker}\,L,\qquad\mathrm{Im}\,L=\mathrm{Ker}\,Q=\mathrm{Im}\,(I-Q),$$
$$X=\mathrm{Ker}\,L\oplus\mathrm{Ker}\,P,\qquad Y=\mathrm{Im}\,L\oplus\mathrm{Im}\,Q.$$

因此, $L|_{\mathrm{Dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P}:\mathrm{Dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P\to\mathrm{Im}\,L$ 是可逆的, 且逆算子 $K_p:\mathrm{Im}\,L\to\mathrm{Dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P$ 可以表示成

$$K_py(t)=\int_0^t\int_0^s y(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s-\frac{t}{\omega}\int_0^\omega\int_0^s y(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s=$$
$$-\frac{t}{\omega}\int_0^\omega(\omega-s)y(s)\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s,\qquad y\in\mathrm{Im}\,L\subset Y.\tag{7}$$

引理 2 方程(2)有一个 ω-周期解, 当且仅当算子方程为

$$Lx=Nx,\tag{8}$$

在 X 中有一个 ω-周期解 $x\in\mathrm{Dom}\,L$.

证明 由式(3),(4)可以得到. 证毕.

引理 3 $N:X\to Y$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的.

证明 由式(3),(6),(7)可得

$$QNx(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\{-f(t,x'(t))-[g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)]\}\mathrm{d}t,\qquad\forall x\in X,$$

$$K_P(I-Q)Nx=-\frac{t}{\omega}\int_0^\omega(\omega-s)Nx(s)\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)Nx(s)\mathrm{d}s+$$
$$\frac{t}{\omega}\int_0^\omega(\omega-s)\frac{1}{\omega}\int_0^\omega Nx(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s-\int_0^t(t-s)\frac{1}{\omega}\int_0^\omega Nx(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s=$$
$$\int_0^t(t-s)Nx(s)\mathrm{d}s-\left(\frac{t}{2}+\frac{t^2}{2\omega}\right)\int_0^\omega Nx(s)\mathrm{d}s+\frac{t}{\omega}\int_0^\omega sNx(s)\mathrm{d}s.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理, 可以证明 $QN:X\to Y$ 和 $K_P(I-Q)N:X\to X$ 是连续的. 由连续函数的有界性定理可得, 对任意的 $x\in\bar{\Omega}$, 存在常数 $K_1\geqslant0$, 使得

$$\|QNx\|_0\leqslant K_1,\qquad\|K_P(I-Q)Nx\|_0\leqslant K_1.$$

另一方面, 对于任意的 $x\in\bar{\Omega}$, 有

$$\frac{\mathrm{d}(QNx)(t)}{\mathrm{d}t}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}(K_P(I-Q)Nx)(t)}{\mathrm{d}t}=\int_0^t Nx(s)\mathrm{d}s-\left(\frac{t}{\omega}+\frac{1}{2}\right)\int_0^\omega Nx(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\omega}\int_0^\omega sNx(s)\mathrm{d}s.$$

容易看出, QN 的导函数和 $K_P(I-Q)N$ 的导函数在 X 上是连续的. 因此, 对于任意的 $x\in\bar{\Omega}$, 存在常数 $K_2\geqslant0$, 使得

$$\left|\frac{\mathrm{d}(QNx(t))}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant K_2,$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}(K_P(I-Q)Nx)(t)}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant K_2.$$

因此, QNx 和 $K_P(I-Q)Nx$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是一致有界且等度连续的. 于是, 由 Asoli-Arzela 定理可知, $QN(\overline{\Omega})$和 $K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})$是紧的, 从而 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L-紧的. 证毕.

2　主要结果及其证明

定理 1　假设以下 3 个条件成立:

(H_1) 存在常数 $D>0$, 使得对所有的 $t\in\mathbf{R}$, $|u|>D$, 有 $u(g(t,u)-p(t))<0$;

(H_2) 存在常数 $a\geqslant 0$ 和 $b\geqslant 0$, 使得对任意的 $t, y\in\mathbf{R}$, 有 $|f(t,y)|\leqslant a|y|+b$, 且 $f(t,0)=0$ 对所有的 $t\in\mathbf{R}$ 成立.

(H_3) 存在常数 $c\geqslant 0$ 和 $d\geqslant 0$, 满足 $2a+3c\omega<\frac{1}{\omega}$, 使得对所有的 $t\in\mathbf{R}$, $u\geqslant D$, 有 $g(t,u)-p(t)\geqslant -cu-d$. 则方程 (2) 至少存在一个 ω-周期解.

证明　设 $\Omega_1=\{x: x\in \mathrm{Dom}\ L\subset X,\ Lx=\lambda Nx,\ \lambda\in(0,1)\}$, $x=x(t)\in\Omega_1$, 则 $x=x(t)$ 是方程

$$x''=-\lambda\{f(t,x'(t))+(g(t,x(t-\tau)))-p(t)\}\tag{9}$$

的一个解. 其中, λ是$(0,1)$中的某个确定的数. 设 $t_1, t_2\in[0,\omega]$ 分别是 $x(t)$ 在$[0,\omega]$上取到最小值和最大值所对应的 t 值, 则有

$$x'(t_1)=x'(t_2)=0,\qquad x''(t_1)\geqslant 0,\quad x''(t_2)\leqslant 0.$$

从式(9)和条件(H_2) 可知

$$g(t_1,x(t_1-\tau(t_1)))-p(t_1)=-\frac{1}{\lambda}x''(t_1)\leqslant 0,\tag{10}$$

$$g(t_2,x(t_2-\tau(t_2)))-p(t_2)=-\frac{1}{\lambda}x''(t_2)\geqslant 0.\tag{11}$$

下面证明存在 $t_0\in[0,\omega]$, 使得

$$|x(t_0)|\leqslant D.\tag{12}$$

事实上, 由式(10), (11) 可得 $g(t_1,x(t_1-\tau(t_1)))-p(t_1)=0$ 和 $g(t_2,x(t_2-\tau(t_2)))-p(t_2)=0$ 至少有一式成立, 或 $g(t_1,x(t_1-\tau(t_1)))-p(t_1)<0$ 和 $g(t_2,x(t_2-\tau(t_2)))-p(t_2)>0$, 两者同时成立.

情况 1　如果 $g(t_1,x(t_1-\tau(t_1)))-p(t_1)=0$ 和 $g(t_2,x(t_2-\tau(t_2)))-p(t_2)=0$ 至少有一式成立.

设 $g(t_1,x(t_1-\tau(t_1)))-p(t_1)=0$ 成立, 则由条件 (H_1)可得, $|x(t_1-\tau(t_1))|\leqslant D$. 设 $t_1-\tau(t_1)=n\omega+t_0$, 其中, n 是整数, $t_0\in[0,\omega)$. 由 $x(t)$的周期性, 有

$$|x(t_0)|=|x(t_1-\tau(t_1))|\leqslant D,$$

即式(12) 成立; 若 $g(t_2,x(t_2-\tau(t_2)))-p(t_2)=0$, 或 $g(t_1,x(t_1-\tau(t_1)))-p(t_1)=0$ 和 $g(t_2,x(t_2-\tau(t_2)))-p(t_2)=0$ 同时成立, 类似上面的讨论也存在 $t_0\in[0,\omega)$, 使得式 (12) 成立.

情况 2　$g(t_1,x(t_1-\tau(t_1)))-p(t_1)<0$ 和 $g(t_2,x(t_2-\tau(t_2)))-p(t_2)>0$ 同时成立.

设 $h(t)=g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)$, 则有 $h(t_1)<0$ 和 $h(t_2)>0$. 再令 $t^*=\max\{t_1,t_2\}$, $t_*=\min\{t_1,t_2\}$, 因为 $f, g\in C(\mathbf{R}\times\mathbf{R},\mathbf{R})$, 所以由零点存在定理可得, 存在 $t_3\in(t_*,t^*)$, 使得

$$g(t_3,x(t_3-\tau(t_3)))-p(t_3)h(t_3)=0.$$

同样由情况 1 的讨论可知, 式(12) 成立.

综上所述, 式(12) 总是成立的.

应用 Schwarz 不等式, 有

$$|x(t)|=|x(t_0)+\int_{t_0}^{t}x'(s)\mathrm{d}s|\leqslant$$

$$D+\int_0^{\omega}|x'(s)|\,\mathrm{d}s\leqslant D+\sqrt{\omega}|x'|_2,\qquad t\in[0,\omega],$$

从而有

$$\|x\|_0=\max_{t\in[0,\omega]}|x(t)|\leqslant D+\sqrt{\omega}|x'|_2. \tag{13}$$

将方程(9)两边从0到ω求积分，可得

$$\int_0^\omega f(t,x'(t))\mathrm{d}t+\int_0^\omega[g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)]\mathrm{d}t=0. \tag{14}$$

记

$$D_1=\{t\mid t\in[0,\omega],x(t-\tau(t))<-D\},$$
$$D_2=\{t\mid t\in[0,\omega],x(t-\tau(t))\geqslant-D\},$$
$$D_3=\{t\mid t\in[0,\omega],x(t-\tau(t))>+D\},$$
$$D_4=\{t\mid t\in[0,\omega],-D\leqslant x(t-\tau(t))\leqslant D\},$$
$$m=\omega\cdot\max\{|g(t,x)-p(t)|:t\in[0,\omega],-D\leqslant x\leqslant D\}.$$

又由条件(H_2)可得

$$\int_0^\omega|f(t,x'(t))|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\omega(a|x'(t)|+b)\mathrm{d}t\leqslant a\sqrt{\omega}|x'|_2+b\omega. \tag{15}$$

由条件(H_3)和式(13)，有

$$\int_{D_2}|g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)|\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\int_{D_3}|g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)|\mathrm{d}t+\int_{D_4}|g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)|\mathrm{d}t\leqslant$$
$$m+\int_0^\omega(c|x(t-\tau(t))|+d)\mathrm{d}t\leqslant m+d\omega+c\omega\|x\|_0\leqslant$$
$$m+d\omega+c\omega(D+\sqrt{\omega}|x'|_2). \tag{16}$$

由条件(H_1)及式(14)，(15)，(16)，得到

$$\int_{D_1}|g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)|\mathrm{d}t=\int_{D_1}[g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)]\mathrm{d}t=$$
$$-\int_{D_2}[g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)]\mathrm{d}t-\int_0^\omega f(t,x'(t))\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\int_{D_2}|g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)|\mathrm{d}t+\int_0^\omega|f(t,x'(t))|\mathrm{d}t\leqslant$$
$$m+d\omega+c\omega(D+\sqrt{\omega}|x'|_2)+a\sqrt{\omega}|x'|_2+b\omega=$$
$$m+(b+d+cD)\omega+(a+c\omega)\sqrt{\omega}|x'|_2. \tag{17}$$

结合式(16)，(17)，可得到

$$\int_0^\omega|g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)|\mathrm{d}t=$$
$$\int_{D_1}|g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)|\mathrm{d}t+\int_{D_2}|g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)|\mathrm{d}t\leqslant$$
$$[m+d\omega+c\omega(D+\sqrt{\omega}|x'|_2)]+[m+(b+d+cD)\omega+(a+c\omega)\sqrt{\omega}|x'|_2]=$$
$$2m+(b+2d+2cD)\omega+(a+2c\omega)\sqrt{\omega}|x'|_2. \tag{18}$$

对方程(9)两边，同时乘以$x(t)$，再从到ω求积分，可得

$$|x'|_2^2=\int_0^\omega|x'|^2\mathrm{d}t=\lambda\int_0^\omega\{f(t,x'(t))+[g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)]\}x(t)\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\|x\|_0\{\int_0^\omega|f(t,x'(t))|\mathrm{d}t+\int_0^\omega|g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)|\mathrm{d}t\}\leqslant$$
$$(D+\sqrt{\omega}|x'|_2)\{(a+c\omega)\sqrt{\omega}|x'|_2+2m+(b+2d+2cD)\omega+(a+2c\omega)\sqrt{\omega}|x'|_2\}=$$
$$(2a+3c\omega)\omega|x'|_2^2+B\sqrt{\omega}|x'|_2+C. \tag{19}$$

式(19)中，$B=2aD+2m+(b+2d+2cD)\omega$，$C=[2m+(b+2d+2cD)\omega]D$. 又因为$2a+3c\omega<1/\omega$，所以必存在一个常数$M_1\geqslant 0$，使得

$$|x'|_2\leqslant M_1,\qquad \|x\|_0\leqslant D+\sqrt{\omega}|x'|_2\leqslant M_1. \tag{20}$$

结合式(9), (15), (19), 可得

$$\int_0^{\omega} |x''(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\omega} |f(t,x'(t))|\,\mathrm{d}t + \int_0^{\omega} |g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant$$

$$(2a+3c\omega)\sqrt{\omega}|x'|_2 + 2m + (b+2d+2cD)\omega := M_2.$$

因为 $x(0)=x(\omega)$, 所以由 Rolle 定理可知, 存在 $\eta\in(0,\omega)$, 使得

$$x'(\eta) = 0.$$

对所有的 $t\in[0,\omega]$, 有

$$|x'(t)| = |x'(\eta) + \int_\eta^t x''(s)\,\mathrm{d}s| \leqslant \int_0^{\omega} |x''(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M_2.$$

由式(20)有

$$\|x\|_1 = \max\{\|x\|_0, \|x'\|_0\} \leqslant \max\{M_1, M_2\} \leqslant M_1 + M_2 := M,$$

即对任意的 $x\in\Omega_1$,

$$\|x\|_1 \leqslant M. \tag{21}$$

因此, Ω_1 是有界的.

设 $\Omega_2=\{x: x\in \mathrm{Ker}\,L, Nx\in \mathrm{Im}\,L\}$, 对于任意的 $x\in\Omega_2$, 存在 $M_3\in\mathbf{R}$, 使得 $x=M_3$ 且 $QNx=0$, 因此有

$$\int_0^{\omega} [g(t,M_3) - p(t)]\,\mathrm{d}t = 0.$$

由积分中值定理可得, 存在 $\xi\in[0,\omega]$, 使得 $g(\xi, M_3)-p(\xi)=0$. 再由条件 (H_1), 可得

$$|M_3| < D. \tag{22}$$

因此, Ω_2 是有界的.

设 $\Omega=\{x: x\in X, \|x\|_1 < D+M+1 := M_0\}$, 则由式(21), (22) 有 $\Omega\supset\Omega_1\cup\Omega_2$. 这是一个有界开集, 引理 1 的条件 (1), (2) 都被满足. 定义同伦映射, 即有

$$H(x,\mu) = \mu x - (1-\mu)QNx, \qquad \forall x\in\overline{\Omega}\cap \mathrm{Ker}\,L, \qquad \mu\in[0,1].$$

对于任意的 $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L$, $\mu\in[0,1]$, 有 $x=M_0\in\mathbf{R}$ 且 $|M_0|>D$, 从而对所有的 $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L$, 有

$$xH(x,\mu) = \mu x^2 - \frac{1-\mu}{\omega}\int_0^{\omega} x(g(t,x) - p(t))\,\mathrm{d}t > 0.$$

由此可得到

$$H(x,\mu) \neq 0, \qquad x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L, \qquad \mu\in[0,1].$$

因为 $\mathrm{Im}\,Q=\mathrm{Ker}\,L=\mathbf{R}$, 所以可取同构映射 $J=I: \mathrm{Im}\,Q\to\mathrm{Ker}\,L$. 由拓扑度的同伦不变性可知

$$\deg(JQN, \Omega\cap\mathrm{Ker}\,L, 0) = \deg(QN, \Omega\cap\mathrm{Ker}\,L, 0) =$$

$$\deg(H(x,0), \Omega\cap\mathrm{Ker}\,L, 0) = \deg(H(x,1), \Omega\cap\mathrm{Ker}\,L, 0) = 1\neq 0.$$

引理 1 的条件 (3) 也被满足了. 由引理 1 可知, 方程 (8) 在 $\overline{\Omega}$ 上至少存在一个解 $x=x(t)$. 又因为 $x\in X$ 满足 $x(t+\omega)=x(t)$, 所以 $x=x(t)$ 即为方程 (8) 在 X 中的一个 ω-周期解. 由引理 2 可得, 方程 (2) 在 $\overline{\Omega}$ 上至少存在一个周 ω-期解. 证毕.

3　例子

例 1　考虑方程

$$x''(t) + \frac{1}{100}[\mathrm{e}^{\sin t}x'(t) + \cos(t-x'(t))x'(t)] + g(t,x(t-2\pi\sin t)) = \cos t, \tag{23}$$

$$g(t,x(t-\tau(t))) = \begin{cases} -\dfrac{1}{96\pi}x(t-2\pi\sin t) + 3\sin t, & x\geqslant 0, \quad t\in\mathbf{R}, \\ \dfrac{1}{96\pi}x(t-2\pi\sin t) + 3\sin t, & x\leqslant 0, \quad t\in\mathbf{R}. \end{cases} \tag{24}$$

由式(23)可得

$$\omega = 2\pi, \qquad f(t,x) = \frac{1}{100}[\mathrm{e}^{\sin t}x + \cos(t-x)x], \qquad \tau(t) = 2\pi\sin t,$$

$$g(t,x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{96\pi}x+3\sin t, & x\geqslant 0,\quad t\in\mathbf{R},\\ \dfrac{1}{96\pi}x+3\sin t, & x<0,\quad t\in\mathbf{R}.\end{cases}$$

取 $D=400\pi$, $a=\dfrac{e+1}{100}$, $b=0$, $c=\dfrac{1}{96\pi}$, $d=4$. 容易验证, 定理 1 的所有条件都被满足. 因此, 由定理 1 可得方程 (23) 至少存在一个 2π-周期解.

因为 $f(t,x)$ 中显含 t 且对所有的 $t\in\mathbf{R}$, $f(t,x)$ 不恒大于零, 所以文 [7] 中的定理 3.1 不能应用到方程 (23) 中.

参考文献:

[1] 鲁世平, 葛渭高. 共振情形 m-点边值问题解的存在性[J]. 数学学报, 2006, 49(3): 687-692.

[2] POURNAKI M R, RAZANI A. On the existence of periodic solutions for a class of generalized forced Liénard equations[J]. Appl Math Lett, 2007, 20(3): 248-254.

[3] WANG Wei-bing, LUO Zhi-guo. Positive periodic solutions of second-order differential equations[J]. Appl Math Lett, 2007, 20(3): 266-271.

[4] ZHU Yan-ling, LU Shi-ping. Periodic solutions for p-Laplacian neutral functional differential equation with multiple deviating arguments[J]. J Math Anal Appl, 2007, 336(2): 1357-1367.

[5] DING Wei, HAN Mao-an, YAN Jun-rang. Periodic boundary value problems for the second order functional differential equations[J]. J Math Anal Appl, 2004, 298(1): 341-351.

[6] Li Yong-xiang. Positive periodic solutions of first and second order ordinary differential equations[J]. Chinese Ann Math (B), 2004, 25(3): 413-420.

[7] LIU Bing-wen, HUANG Li-hong. Periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with a deviating argument[J]. J Math Anal Appl, 2006, 321(2): 491-500.

[8] 汪东树, 王全义. 一类具有时滞和比率的扩散系统正周期解[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2006, 27(4): 358-361.

[9] GAINES R E, MAWHIN J L. Coincidence degree and nonlinear differential equation[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977: 40-60.

Periodic Solutions for a Class of Second Order Functional Differential Equations with a Deviating Argument

SHE Zhi-wei, WANG Quan-yi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, by means of Mawhin's continuation theorem, we study the problem on the existence of periodic solutions for the second order differential equations with a deviating argument $x''+f(t,x'(t))+g(t,x(t-\tau(t)))=p(t)$, where $f,g\in C(\mathbf{R}\times\mathbf{R},\mathbf{R})$; and for any $x\in\mathbf{R}$, $g(t+\omega,x)=g(t,x)$, $p\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$; and $\tau\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ are ω-periodic. Without the condition $f(t,y)\leqslant 0$ $(f(t,y)\geqslant 0)$ for all $y\in\mathbf{R}$ and $t\in\mathbf{R}$, we obtain some sufficient conditions on the existence of at least one periodic solution for this equation.

Keywords: functional differential equation; periodic solution; coincidence degree; deviating argument

(责任编辑: 陈志贤　　英文审校: 张金顺, 黄心中)