文章编号: 1000-5013(2009)06-0704-05

某些单叶调和函数类的解析特征

谢志春, 黄心中

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 考虑单位圆内单叶调和函数的某些子类 $S_H^*(\lambda_1,\lambda_2;\alpha)$, $TS_H^*(\lambda_1,\lambda_2;\alpha)$ 的单叶解析性质,单叶性等价条件与拟共形映照之间的关系,以及该函数类中的凸像半径等问题,推广和改进 Öztürk 与 Jahangiri 等人的相应结果.

关键词: 单叶调和函数; 星象函数; 拟共形映照; 凸像半径

中图分类号: O 174.55　　**文献标识码**: A

1 背景知识

用 S_H 表示在单位圆盘 $U=\{z\,\|z|<1\}$ 内调和,且满足条件 $f(0)=f_z(0)-1=0$ 的单叶函数族,那么对于 $f\in S_H$,有 $f=h+\overline{g}$,其中 h 和 g 为解析函数,并且可以表示为

$$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n,\qquad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n,\qquad |b_1|<1. \tag{1}$$

1984 年,Clunie[1] 将单叶解析函数的经典理论和思想应用于单叶调和函数,引起了人们对单叶调和函数的浓厚兴趣.近几年,有不少该领域的工作相继出现[2-8].Jahangiri[8] 定义了 S_H 的一个子类 $S_H(\alpha)$,其中 h 和 g 具有的形式有

$$h(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n,\qquad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|z^n,\qquad |b_1|<1, \tag{2}$$

且满足条件

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zh'(z)-\overline{zg'(z)}}{h(z)+\overline{g(z)}}\right\}\geq\alpha,\qquad 0\leq\alpha<1. \tag{3}$$

Jahangiri 证明了若 $f=h+\overline{g}$ 具有形式(1)的调和函数,且满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n|+\frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n|\right)\leq 2,\qquad 0\leq\alpha<1,\quad a_1=1,$$

则 f 为 U 内的 α 级星象单叶调和函数.若 $f\in S_H(\alpha)$,则该条件也是必要的.Jahangiri 在文[2]假设(3)中的严格不等号是不妥的,等号可由 $f(z)=z+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\overline{z}$ 所达到.文[6]中引入 S_H 的子类 $S_H^*(\lambda,\alpha)$,满足条件

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zh'(z)-\overline{zg'(z)}}{\lambda(zh'(z)-\overline{zg'(z)})+(1-\lambda)(h(z)+\overline{g(z)})}\right\}\geq\alpha$$

这里,$0\leq\alpha<1$,$0\leq\lambda\leq1$,$z\in U$.Öztürk 对该类函数也做了相应的讨论.

本文引入 S_H 的一个子类 $S_H^*(\lambda_1,\lambda_2;\alpha)$,且满足条件

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\lambda_2(h(z)+\overline{g(z)})+(1-\lambda_2)(zh'(z)-\overline{zg'(z)})}{\lambda_1(zh'(z)-\overline{zg'(z)})+(1-\lambda_1)(h(z)+\overline{g(z)})}\right\}\geq\alpha, \tag{4}$$

其中,$0\leq\alpha<1$,$0\leq\lambda_1,\lambda_2\leq1$,$z\in U$,并且设 $\lambda_1+\lambda_2\neq1$,否则是平凡的.$S_H^*(\lambda_1,\lambda_2;\alpha)$ 中满足 h,g 具有形式

收稿日期: 2009-04-19

通信作者: 黄心中(1957-),男,教授,主要从事函数论的研究.E-mail:huangxz@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金项目(2008J0195)

(2)的函数类,记作 $TS_H^*(\lambda_1,\lambda_2;\alpha)$.

2　主要结果及其证明

首先,对该函数类的系数进行研究,可以得到

定理 1　设 $f=h+\overline{g}$ 具有形式(1)的调和函数,且满足

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}{1-\alpha}|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)}{1-\alpha}|b_n|\leq 1. \tag{5}$$

当 $0\leq\alpha<1$, $\alpha\lambda_1+\lambda_2\leq\alpha$ 时,f 在单位圆 U 内保向单叶调和;如果 $\lambda_2+(1+\alpha)\lambda_1\leq 1-\alpha$, $\lambda_2-(1-\alpha)\lambda_1\leq\alpha/2$. 则 $f\in S_H^*(\lambda_1,\lambda_2;\alpha)$.

证明　因为 $\alpha\lambda_1+\lambda_2\leq\alpha$, $|b_1|<1$,则对任何 $z_1,z_2\in U$, $z_1\neq z_2$ 有

$$|f(z_1)-f(z_2)|=|(z_1-z_2)+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(z_1^n-z_2^n)+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{b_n(z_1^n-z_2^n)}|\geq$$

$$(1-|b_1|)|z_1-z_2|-\sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)|z_1^n-z_2^n|.$$

若 $a_n=b_n=0$, $n=2,3,\cdots$,则 $|f(z_1)-f(z_2)|\geq(1-|b_1|)|z_1-z_2|>0$;否则,有

$$|f(z_1)-f(z_2)|>|z_1-z_2|(1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|-\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|)\geq$$

$$|z_1-z_2|(1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}{1-\alpha}|a_n|-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)}{1-\alpha}|b_n|)\geq 0.$$

因此,f 在 U 内单叶. 同理可证 $|h'(z)|>|g'(z)|$,即 f 是 U 内的保向单叶调和映照. 当 λ_1,λ_2 还满足条件 $\lambda_2+(1+\alpha)\lambda_1\leq 1-\alpha$, $\lambda_2-(1-\alpha)\lambda_1\leq\alpha/2$ 时,$f\in S_H^*(\lambda_1,\lambda_2;\alpha)$.

对任何复数 W, $\mathrm{Re}\,w\geq\alpha$ 的充要条件是 $|1-\alpha+w|\geq|1+\alpha-w|$,因此要证明 $f\in S_H^*(\lambda_1,\lambda_2;\alpha)$,等价于证明

$$|(1-\alpha)B+A|-|(1+\alpha)B-A|\geq 0,$$

其中,$A=\lambda_2(h(z)+\overline{g(z)})+(1-\lambda_2)(zh'(z)-\overline{zg'(z)})$, $B=\lambda_1(zh'(z)-\overline{zg'(z)})+(1-\lambda_1)(h(z)+\overline{g(z)})$. 因为 $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$,经整理可得

$$|(1-\alpha)B+A|-|(1+\alpha)B-A|=$$

$$|(2-\alpha)z+\sum_{n=2}^{\infty}[n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)+n\lambda_1-\lambda_1+1]a_nz^n-$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}[n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)+n\lambda_1+\lambda_1-1]\overline{b_nz^n}|-|\alpha z-\sum_{n=2}^{\infty}[n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)-$$

$$n\lambda_1+\lambda_1-1]a_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}[n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)-n\lambda_1-\lambda_1+1]\overline{b_nz^n}|\geq$$

$$(2-\alpha)|z|-\sum_{n=2}^{\infty}|n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)+n\lambda_1-\lambda_1+1||a_n||z|^n-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)+n\lambda_1+\lambda_1-1||b_n||z|^n-$$

$$\alpha|z|-\sum_{n=2}^{\infty}|n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)-n\lambda_1+\lambda_1-1||a_n||z|^n-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)-n\lambda_1-\lambda_1+1||b_n||z|^n=$$

$$2(1-\alpha)|z|\{1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}{1-\alpha}|a_n||z|^{n-1}-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)}{1-\alpha}|b_n||z|^{n-1}\}\geq 2(1-\alpha)|z|\{1-$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}{1-\alpha}|a_n|-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)}{1-\alpha}|b_n|\}\geq 0,$$

所以,$f\in S_H^*(\lambda_1,\lambda_2;\alpha)$ 对应函数为

$$f_0(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-\alpha}{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}x_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)}\overline{y_nz^n},$$

其中, $\sum_{n=2}^{\infty}|x_n|+\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|=1$, 有 $f_0\in S_H^*(\lambda_1,\lambda_2;\alpha)$.

由此可见,该函数类的系数假定已达到最佳. 类似的[6-8],可证

定理 2 设 $f=h+\overline{g}$ 为具有形式(2)的调和函数. 则 $f\in TS_H^*(\lambda_1,\lambda_2;\alpha)$,当且仅当

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}{1-\alpha}|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)}{1-\alpha}|b_n|\leq 1,$$

其中, $0\leq\alpha<1$, $\alpha\lambda_1+\lambda_2\leq\alpha$, $\lambda_2+(1+\alpha)\lambda_1\leq 1-\alpha$, $\lambda_2-(1-\alpha)\lambda_1\leq\alpha/2$.

证明 (i) 充分性. 可由定理 1 直接得到. (ii) 必要性. 若 $f\in TS_H^*(\lambda_1,\lambda_2;\alpha)$,则有

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\lambda_2(h(z)+\overline{g(z)})+(1-\lambda_2)(zh'(z)-\overline{zg'(z)})}{\lambda_1(zh'(z)-\overline{zg'(z)})+(1-\lambda_1)(h(z)+\overline{g(z)})}\right\}\geq\alpha,$$

等价于

$$\mathrm{Re}\Big\{[(1-\alpha)z-\sum_{n=2}^{\infty}[n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)]|a_n|z^n-$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}[n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)]|b_n|\overline{z}^n]/[z-\sum_{n=2}^{\infty}(n\lambda_1-\lambda_1+1)|a_n|z^n+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\lambda_1-n\lambda_1)|b_n|\overline{z}^n]\Big\}\geq 0.$$

令 $z=r$, $0<r<1$,代入上式可得

$$[(1-\alpha)r-\sum_{n=2}^{\infty}[n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)]|a_n|r^n-$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}[n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)]|b_n|r^n]/[r-\sum_{n=2}^{\infty}(n\lambda_1-\lambda_1+1)|a_n|r^n+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\lambda_1-n\lambda_1)|b_n|r^n]\geq 0,$$

即

$$[(1-\alpha)-\sum_{n=2}^{\infty}[n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)]|a_n|r^{n-1}-$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}[n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)]|b_n|r^{n-1}]/[1-\sum_{n=2}^{\infty}(n\lambda_1-\lambda_1+1)|a_n|r^{n-1}+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\lambda_1-n\lambda_1)|b_n|r^{n-1}]\geq 0.$$

因为分母大于零,故分子为

$$(1-\alpha)-\sum_{n=2}^{\infty}[n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)]|a_n|r^{n-1}-$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}[n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)]|b_n|r^{n-1}\geq 0.$$

令 $r\to 1^-$,则有

$$(1-\alpha)-\sum_{n=2}^{\infty}[n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)]|a_n|-$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}[n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)]|b_n|\geq 0,$$

因此有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}{1-\alpha}|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)}{1-\alpha}|b_n|\leq 1.$$

定理 2 证毕.

文[6]中证明, $f\in TS_H^*(\lambda,\alpha)$ 的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-\alpha-\alpha\lambda(n-1)}{1-\alpha}|a_n|+\frac{n+\alpha-\alpha\lambda(n+1)}{1-\alpha}|b_n|\right)\leq 2.$$

其中, $|a_1|=1$, $0\leq\alpha<1$, $0\leq\lambda\leq 1$, $\lambda\leq\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$ 在定理 2 中,当 $\lambda_2=0$ 的特殊情况,可见定理 2 推广了文[6]的结果.

推论 1 设 $f=h+\overline{g}$ 为具有形式(2)的调和函数. 则 $f\in TS_H^*(0,\lambda;\alpha)$,当且仅当

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha-\lambda(n-1)}{1-\alpha}|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\alpha-\lambda(n+1)}{1-\alpha}|b_n|\leq 1,$$

其中 $0\leq\alpha<1$, $0\leq\lambda\leq\min\{1-\alpha,\alpha/2\}$. 在定理 2 的基础上,证明定理 3.

定理 3　若 $f\in TS_H^*(\lambda_1,\lambda_2;\alpha)$,且 $\alpha\lambda_1+\lambda_2<\alpha$,则 f 为单位圆 U 内的 K-拟共形映照.

证明　从拟共形映照理论中得知,对于 $f\in TS_H^*(\lambda_1,\lambda_2;\alpha)$,要验证其是否为拟共形映照,只要估计其伸缩商 $\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|$ 的值. 因为 $|\mu_f(z)|=\left|\frac{g'}{h'}\right|=\frac{\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}nb_nz^{n-1}\right|}{\left|1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}\right|}\leq\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}n|b_n|}{1-\sum\limits_{n=2}^{\infty}n|a_n|}$,取 $\beta=\frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)}$,则有 $0<\beta<1$,又 $\beta\frac{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}{1-\alpha}\geq n$, $n\geq 2$,所以,有

$$|\mu_f(z)|\leq\frac{|b_1|+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\beta\frac{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}{1-\alpha}|b_n|}{1-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\beta\frac{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}{1-\alpha}|a_n|}\leq$$

$$\frac{|b_1|+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\beta\frac{n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)}{1-\alpha}|b_n|}{1-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\beta\frac{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}{1-\alpha}|a_n|}\leq$$

$$\frac{|b_1|+\beta\left(1-|b_1|-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}{1-\alpha}|a_n|\right)}{1-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\beta\frac{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}{1-\alpha}|a_n|}=$$

$$1-\frac{(1-\beta)(1-|b_1|)}{1-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\beta\frac{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}{1-\alpha}|a_n|}<1,$$

从而 f 为单位圆 U 内的拟共形映照.

最后,就该类函数的凸像半径进行研究,有

定理 4　若 $f\in TS_H^*(\lambda_1,\lambda_2;\alpha)$, $\alpha\lambda_1+\lambda_2\leq\alpha$,则 f 将

$$\left\{z\,\middle|\,|z|\leq\min\left\{\min_{n\geq 2}\left\{\frac{[2-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)](1-|b_1|)}{2n\{(1-\alpha)-[(1+\alpha)-2(\alpha\lambda_1+\lambda_2)]|b_1|\}}\right\}^{1/n-1},1\right\}\right\}$$

映成凸区域. 特别地,当 $|b_1|=\frac{1-\alpha}{1+\alpha-2(\alpha\lambda_1+\lambda_2)}$ 时, $f=z+|b_1|\bar{z}$ 将整个单位圆映成凸区域.

证明　设 $f\in TS_H^*(\lambda_1,\lambda_2;\alpha)$,故有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}{1-\alpha}|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)}{1-\alpha}|b_n|\leq 1,$$

即

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}{n(1-\alpha)}n|a_n|+\frac{n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)}{n(1-\alpha)}n|b_n|\right)\leq$$

$$1-\frac{1+\alpha-2(\alpha\lambda_1+\lambda_2)}{1-\alpha}|b_1|. \tag{6}$$

当 $|b_1|<\frac{1-\alpha}{1+\alpha-2(\alpha\lambda_1+\lambda_2)}$ 时,由于有

$$\min_{n\geq 2}\left\{\frac{n-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n-1)}{n(1-\alpha)},\frac{n+\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)(n+1)}{n(1-\alpha)}\right\}=\frac{2-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)}{2(1-\alpha)},$$

故由式(6)可得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(|a_n|+|b_n|)\leq\frac{2\{(1-\alpha)-[1+\alpha-2(\alpha\lambda_1+\lambda_2)]|b_1|\}}{2-\alpha-(\alpha\lambda_1+\lambda_2)}.$$

对于 $f\in TS_H^*(\lambda_1^*,\lambda_2;\alpha)$,取 $r\in(0,1]$,则有

$$\frac{1}{r}f(r(z))=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^{n-1}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|r^{n-1}\bar{z}^n\triangleq z-$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} | A_n | z^n + \sum_{n=1}^{\infty} | B_n | \overline{z}^n \in TS_H^*(\lambda_1, \lambda_2; \alpha).$$

由文[7]可知,当 $\sum_{n=2}^{\infty} n^2(|A_n| + |B_n|) \le 1 - |B_1| = 1 - |b_1|$ 时,有 $1/rf(rz)$ 为凸像单叶调和函数. 又因为有

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2(|A_n| + |B_n|) = \sum_{n=2}^{\infty} n^2(|a_n| + |b_n|) r^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) nr^{n-1},$$

所依,当 $nr^{n-1} \le \dfrac{[2 - \alpha - (\alpha\lambda_1 + \lambda_2)](1 - |b_1|)}{2\{(1 - \alpha) - [1 + \alpha - 2(\alpha\lambda_1 + \lambda_2)]|b_1|\}}$, $n = 2, 3, \cdots$ 时,有

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2(|A_n| + |B_n|) \le 1 - |b_1| = 1 - |B_1|.$$

此时,有 $r \le \min\limits_{n\ge2}\left\{\dfrac{[2 - \alpha - (\alpha\lambda_1 + \lambda_2)](1 - |b_1|)}{2n\{(1 - \alpha) - [1 + \alpha - 2(\alpha\lambda_1 + \lambda_2)]|b_1|\}}\right\}^{1/n-1}$,故 $f(z)$ 在

$$\left\{ z \,\middle|\, |z| \le \min\left\{ \min_{n\ge2}\left\{\frac{[2 - \alpha - (\alpha\lambda_1 + \lambda_2)](1 - |b_1|)}{2n\{(1 - \alpha) - [(1 + \alpha) - 2(\alpha\lambda_1 + \lambda_2)]|b_1|\}}\right\}^{1/n-1}, 1\right\}\right\}$$

内为凸的. 当 $|b_1| = \dfrac{1 - \alpha}{1 + \alpha - 2(\alpha\lambda_1 + \lambda_2)}$ 时,易看出 $f = z + |b_1|\overline{z}$ 将整个单位圆映成凸区域. 证毕. 由于有

$$\min_{n\ge2}\left\{\frac{[2 - \alpha - (\alpha\lambda_1 + \lambda_2)](1 - |b_1|)}{2n\{(1 - \alpha) - [1 + \alpha - 2(\alpha\lambda_1 + \lambda_2)]|b_1|\}}\right\}^{1/n-1} \ge \min_{n\ge2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n-1} = \frac{1}{2},$$

因此,定理 4 的结论改进和推广了文[6]中定理 2.6 的相应结论.

参考文献:

[1] CLUNIE J, SHEIL-SMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci I Math, 1984, 9A(1): 3-25.

[2] 黄心中. 给定复伸张单叶调和映照的面积偏差[J]. 华侨大学学报:自然科学版, 2007, 28(2): 208-211.

[3] 吴瑞溢, 黄心中. Salagean 类单叶调和函数的特征[J]. 华侨大学学报:自然科学版, 2008, 29(2): 308-311.

[4] SILVERMAN H, SILVIA E M. Subclasses of harmonic univalent functions[J]. New Zeal J Math, 1999, 28(2): 275-284.

[5] ÖZTÜRK M, YALÇIN S, YAMANKARADENIZ M. A subclass of harmonic univalent functions with negative coefficients[J]. Appl Math Comput, 2003, 142(2/3): 469-476.

[6] ÖZTÜRK M, YALÇIN S, YAMANKARADENIZ M. Convex subclass of harmonic starlike functions[J]. Appl Math Comput, 2004, 154(2): 449-459.

[7] JAHANGIRI J M, SILVERMAN H. Harmonic close-to-convex mappings[J]. J Appl Math and Stochastic Analysis, 2002, 15(1): 23-28.

[8] JAHANGIRI J M. Harmonic functions starlike in the unit disk[J]. J Math Anal, 1999, 235(2): 470-477.

On the Analytic Characteristic Properties for Some Univalent Harmonic Functions

XIE Zhi-chun, HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The univalent analytic properties, equivalent conditions, the relationship between quasiconformal mappings and radius of convexity for some subclasses of univalent harmonic functions in the unit disk are investigated. Our results improve and extend the corresponding ones by Öztürk and Jahangiri.

Keywords: univalent harmonic function; starlike function; quasiconformal mappings; radius of convexity

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)