

文章编号: 1000-5013(2009)06-0686-05

类桁架结构的多工况应力约束拓扑优化设计

闫凯, 周克民

(华侨大学 土木工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 以纤维结点处的密度和方向作为设计变量, 迭代过程中将纤维方向调整到主应力方向, 有效地避免单元铰接和棋盘格现象. 采用三角形单元进行有限元的分析, 克服矩形单元对不规则区域划分单元的局限性. 采用各向异性材料模型模拟类桁架杆系结构, 优化结果用纤维密度连线表示, 与实际的杆系结构具有十分相似的对应关系, 便于制造. 通过典型的算例, 证明该方法的有效性和准确性.

关键词: 拓扑优化; 应力约束; 多工况; 三角形单元

中图分类号: TU 311; TU 323.04

文献标识码: A

由于拓扑优化本身的复杂性及其数学求解的不稳定性, 多工况下的拓扑优化研究进展一直比较缓慢. 1904年, Michell^[1]提出了 Michell 桁架理论, 研究单工况应力约束拓扑优化结构的解析解, 其后许多学者做了进一步的研究^[2-6]. Bendsøe 等^[7]以各工况下结构柔顺度的加权平均值为目标函数, 提出多工况结构拓扑优化方法, 但其目标函数不可微, 优化效果并不理想. 隋允康等^[8-9]研究了多工况应力约束全局化策略下的拓扑优化方法. 王键等^[10]采用包络法处理大量的应力约束, 提出分层优化的方法. Guan 等^[11-12]用双向进化结构优化方法处理应力约束问题. 周克民等^[13-14]提出了基于类桁架连续体的结构拓扑优化方法. 本文采用三角形单元进行划分, 提出基于类桁架结构的多工况应力约束拓扑优化设计.

1 建立力学模型

1.1 类桁架连续体材料模型

σ_i , ϵ_i 分别为纤维的应力和应变, t_i 为纤维密度, 其中, $i=1, 2$. 假设纤维的两个方向正交, 材料微元面 dA_i 上的力为 $\sigma_i dA_i$, 其上纤维的横截面面积为 $t_i dA_i$, 所承受的力为 $\sigma_i t_i dA_i$. 那么, dA_i 上的平均应力为 $\sigma_i = \sigma_i t_i / t_i$. 其中, $i=1, 2$, $t_{1,2}=0$. 设纤维的弹性模量为 E , 有 $\sigma_i = E \epsilon_i$, $i=1, 2$. 将其带入平均应力式中, 可得 $\sigma_i = E t_i \epsilon_i$, $i=1, 2$.

在 Michell 桁架结构中, 材料的主应力是沿着杆件方向, 不存在与杆件垂直的剪切应力. 但在优化过程中, 剪切模量不能忽略, 否则, 刚度矩阵会奇异. 假设材料的剪切应力 τ 与应变 ϵ 的关系为

$$\tau_{1,2} = 0.25 E (t_1 + t_2) \epsilon_{1,2}, \quad 0 \leq \epsilon_{1,2} \leq 1. \quad (1)$$

在计算迭代过程中, 基材料的刚度不断减少至 $\tau=0$, 满足了类桁架结构在材料主方向的剪切刚度为零的条件. 则有

$$[\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \tau_{1,2}]^T = D(t_1, t_2) [\epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \epsilon_{1,2}]^T. \quad (2)$$

式(2)中, 弹性矩阵 $D(t_1, t_2) = E \cdot \text{diag}[t_1 \quad t_2 \quad 0.25(t_1 + t_2)]$. 对于 Michell 桁架结构, 相邻杆件没有相互作用, 所以取泊松比为零. 当 $t_1 = t_2 = 1$, $\epsilon = 1$ 时, 为各向同性材料.

1.2 整体坐标系下的弹性矩阵

设纤维的方向角 θ , 则在整体坐标系下材料的应力、应变关系为

收稿日期: 2008-09-03

通信作者: 周克民(1962-), 男, 教授, 主要从事结构拓扑优化的研究. E-mail: zhoukm@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(1087072); 教育部科学技术研究重点项目(208169); 福建省自然科学基金资助项目(E0640010)

$$= D(t_1, t_2, \theta). \quad (3)$$

利用坐标系的转换矩阵 $T(\theta)$, 可得到整体坐标系下弹性矩阵, 即

$$D(t_1, t_2, \theta) = T^T(\theta) \bar{D}(t_1, t_2) T(\theta) = t_m D_0 + t_a (D_c \cos 2\theta + D_s \sin 2\theta). \quad (4)$$

$$\text{其中, } T(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0.5 \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -0.5 \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}, D_s = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_0 = \text{diag}[1 \quad 1 \quad \frac{1}{2}], D_c = \text{diag}[1 \quad -1 \quad 0]$$

$$t_m = (t_1 + t_2)/2, t_a = (t_1 - t_2)/2.$$

1.3 多工况下优化结构的拓扑优化方法

拓扑优化结构在多工况条件下, 优化材料一般不是两个方向, 也不正交. 为简化研究问题, 仍采用两相正交材料模型. 假设在多工况下, 结构达到最优时的方向刚度与各单工况下的方向刚度最大值的差值最小, 其局部坐标系下的弹性矩阵为

$$D(\theta; x_1, x_2, \theta) = T^T(\theta) \bar{D}(x_1, x_2) T(\theta). \quad (5)$$

式(5)中, x_1, x_2 为纤维的密度, θ 为纤维方向与整体坐标轴间的夹角, θ 为整体坐标轴与局部坐标轴之间的夹角. 因此, 多工况下的拓扑优化问题可以描述: 求解 $\min_{x_1, x_2} f(x_1, x_2)$, 是目标函数 $f(x_1, x_2)$

d 最小化, 其约束条件为 $|\epsilon_l| \leq \epsilon_p, l=1, 2, \dots, L$. 其中, ϵ_l 为工况 l 下的主应变, $\epsilon_p = \epsilon_p / E$ 为允许应变, L 为表示工况数.

设在单工况 l 下结点处的纤维密度为 $t_{1,l}, t_{2,l}$, 纤维方向为 θ_l , 弹性矩阵为 $D(t_{1,l}, t_{2,l}, \theta_l)$, 在多工况下, 求解拓扑优化问题中的 x_1, x_2 比较复杂. 因此, 在单工况下弹性矩阵 $D(t_{1,l}, t_{2,l}, \theta_l)$ 的基础上, 建立多工况下的弹性矩阵 $D(x_1, x_2, \theta)$. 设任意单工况 l 下, 优化材料在任意方向的应变为 ϵ , 则在多工况下, 材料在 θ 方向的最大应变不能超过所有工况在 θ 方向应变的最大值. 因此, 纤维在 θ 方向的刚度不能小于各单工况作用下在 θ 方向的刚度, 即有

$$D(\theta; x_1, x_2, \theta) \geq D(\theta; t_{1,l}, t_{2,l}, \theta_l), \quad \theta = \theta_l, \theta_l + \pi/2, \quad l=1, 2, \dots, L. \quad (6)$$

为了使材料的体积最小, 最好使方向刚度接近各单工况下的最大方向刚度. 即

$$D(\theta; x_1, x_2, \theta) = \max_{l=1, 2, \dots, L} D(\theta; t_{1,l}, t_{2,l}, \theta_l), \quad \theta = \theta_l, \theta_l + \pi/2, \quad l=1, 2, \dots, L. \quad (7)$$

由于矩阵 D 中的各元素都是相对独立的, 很难使其中的每个元素同时满足式(7). 于是, 取 D 中的主元素来求解式(7), 有

$$\left. \begin{aligned} D_{1,1}(\theta; x_1, x_2, \theta) &= \max_{l=1, 2, \dots, L} D_{1,1}(\theta; t_{1,l}, t_{2,l}, \theta_l) \\ D_{2,2}(\theta; x_1, x_2, \theta) &= \max_{l=1, 2, \dots, L} D_{2,2}(\theta; t_{1,l}, t_{2,l}, \theta_l) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中, $\theta = \theta_l, l=1, 2, \dots, L$. 由于 $D_{2,2}(\theta; x_1, x_2, \theta) = D_{1,1}(\theta + \pi/2; x_1, x_2, \theta)$, 所以, 式(6)可以定义为

$$D_{1,1}(\theta; x_1, x_2, \theta) = S_m(\theta), \quad \theta = \theta_l, \theta_l + \pi/2, \quad l=1, 2, \dots, L. \quad (9)$$

式(9)中, $S_m(\theta) = \max_{l=1, 2, \dots, L} D_{1,1}(\theta; t_{1,l}, t_{2,l}, \theta_l)$. 为求解方程(9), 令

$$F(\theta) = D_{1,1}(\theta; x_1, x_2, \theta) - S_m(\theta), \quad F^2 = \int_0^{2\pi} [D_{1,1}(\theta; x_1, x_2, \theta) - S_m(\theta)]^2 d\theta.$$

对 F^2 的最小值求解, 则可得 $F^2 = \frac{1}{128} \theta_1^2 + S_m(\theta)^2$. 其中, $\theta_1^2 = (x_1^2 + x_2^2)(35 + 10\theta + 3\theta^2) + 64(x_1 - x_2)(I_1 \sin 2\theta + I_2 \cos 2\theta) + 16(x_1 + x_2)[(3 + \theta)I_1 + (1 - \theta)(I_3 \sin 4\theta + I_4 \cos 4\theta) + 2x_1 x_2(3 + 10\theta + 3\theta^2)]$.

由于 $S_m(\theta)^2$ 与设计变量相互独立, θ_1^2 分别对 x_1, x_2, θ 进行求导, 有 $\frac{\partial F^2}{\partial x_i} = 0, i=1, 2; \frac{\partial F^2}{\partial \theta} = 0$. 即

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 16 \frac{(3 + \theta)I_1 + (1 - \theta)(I_3 \sin 4\theta + I_4 \cos 4\theta)}{19 + 10\theta + 3\theta^2} \\ x_1 - x_2 &= 4(I_1 \sin 2\theta + I_2 \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$(19 + 10\theta + 3\theta^3)[I_1^2 - I_2^2] \sin 4\theta + 2I_1 I_2 \cos 4\theta + 4(1 - \theta)(I_3 \cos 4\theta - I_4 \sin 4\theta) \times \\ [(3 + \theta)I_0 + (1 - \theta)(I_3 \sin 4\theta + I_4 \cos 4\theta)] = 0 \quad (11)$$

式(10), (11)中, $I_{[0,1,2,3,4]} = \frac{1}{E} \int_0^{2\pi} S_m(\theta) [1, \sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin 4\theta, \cos 4\theta] d\theta$. $I_0 - I_4$ 独立于 x_1, x_2, θ , 纤维

方向 及 x_1, x_2 可通过式(10), (11) 求出.

1.4 元刚度矩阵

采用三角形单元, 以每一结点处的纤维密度和方向作为设计变量. 假设单工况下结点 n 处的纤维密度和方向角分别为 $t_{1,n}, t_{2,n}$ 和 n . 其中, $n = 1, 2, \dots, N, N$ 为结点数目. 单元的弹性矩阵可以通过对单元各结点的弹性矩阵进行插值得到, 有

$$D_e(\cdot, \cdot) = \sum_n \frac{1}{S_e} N_n D_n \quad (12)$$

其中, S_e 为单元的截面积, D_n 为结点 n 处的弹性矩阵, N_n 为三角形单元的形函数. 则单元刚度矩阵为

$$\begin{aligned} K^e &= \int_{S_e} B^T D^e B d = \int_{S_e} N_n B^T D(t_{1,n}, t_{2,n}, n) B d = \\ &= \sum_n \frac{1}{S_e} N_n B^T [t_{b,n} D_0 + t_{a,n} (D_c \cos 2n + D_s \sin 2n)] B d = \\ &= \sum_n \frac{1}{S_e} [t_{b,n} K_0^e + t_{a,n} (K_c^e \cos 2n + K_s^e \sin 2n)]. \end{aligned} \quad (13)$$

在式(13)中, $K_0^e = E \int_{S_e} N_n B^T D_0 B d = \frac{1}{3} E A_e B^T D_0 B$, $K_c^e = E \int_{S_e} N_n B^T D_c B d = \frac{1}{3} E A_e B^T D_c B$, $K_s^e =$

$$E \int_{S_e} N_n B^T D_s B d = \frac{1}{3} E A_e B^T D_s B, D_0 = \text{diag}[1 \quad 1 \quad \frac{1}{2}], D_c = \text{diag}[1 \quad -1 \quad 0], D_s = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$t_{b,n} = (t_{1,n} + t_{2,n})/2, t_{a,n} = (t_{1,n} - t_{2,n})/2.$$

2 迭代方法

(1) 用三角形单元对设计域进行划分, 设定结点位置杆件的密度和方向的初始值, 即 $t_{1,n}^0 = t_{2,n}^0 = 1$, $n^0 = 0, n = 1, 2, \dots, N$. 初始材料为各向同性, 其中下标 n 为结点号, N 为结点总数, 上标表示迭代次数.

(2) 单工况下, 各个结点处的应力和应变通过有限元计算方法求得. 在工况 $l(l = 1, 2, \dots, L)$ 下, 主应力的方向和应变分别为

$$\theta_{nl}^i = \frac{1}{2} \tan^{-1} [2 \tau_{xy,nl}^i / (\sigma_{x,nl}^i - \sigma_{y,nl}^i)], \quad (14)$$

$$\epsilon_{nl}^i(\theta_{nl}^i) = \frac{1}{E} [\sigma_{x,nl}^i + \sigma_{y,nl}^i + (\sigma_{x,nl}^i - \sigma_{y,nl}^i) \cos 2\theta_{nl}^i + \tau_{xy,nl}^i \sin 2\theta_{nl}^i] / 2. \quad (15)$$

(3) 确定各单工况作用下, 各结点 n 处的纤维分布. 取主应力方向为纤维的方向

$$\theta_{nl}^i = \begin{cases} \theta_{nl}^{i-1} / \cos(\theta_{nl}^{i-1} - \theta_{nl}^i) / \sqrt{2}/2, \\ \theta_{nl}^{i-1} + \frac{1}{2} / \cos(\theta_{nl}^{i-1} - \theta_{nl}^i) / \sqrt{2}/2. \end{cases} \quad (16)$$

由满应力准则法可得, $t_{1,nl}^i = t_{1,nl}^{i-1} \cdot \epsilon_{nl}^i(\theta_{nl}^i) / \epsilon_{nl}^i(\theta_{nl}^{i-1})$, $t_{2,nl}^i = t_{2,nl}^{i-1} \cdot \epsilon_{nl}^i(\theta_{nl}^i + \pi/2) / \epsilon_{nl}^i(\theta_{nl}^{i-1} + \pi/2)$.

(4) 确定多工况下的优化纤维分布. 由式(10), (11) 可以求解出各结点的 $x_{1,n}^i, x_{2,n}^i, \theta_n^i$. 为避免刚度矩阵奇异, 设置一个密度的下限: $x_{j,n}^i = \max(x_c^i, x_{j,n}^i)$, $x_c^i = R \cdot \max_{j,n} \{x_{j,n}^i\}$. 其中, $j = 1, 2; n = 1, 2, \dots, N$; R 是一个十分小的数, 可取 $R = 10^{-7}$.

(5) 验证收敛条件. 收敛条件为 $|1 - V^i / V^{i-1}| \leq \epsilon$. 其中, ϵ 为收敛准则, 取 $\epsilon = 1\%$; V 是结构所有纤维的体积, $V^i = \frac{1}{3} \sum_{e=1}^{N_e} A_e \sum_{n \in S_e} (x_{1,n}^i + x_{2,n}^i)$; A_e 为单元面积, S_e 为单元 e 的结点集合.

(6) 若 $\epsilon = 0$, 则结束计算; 否则, 降低剪切刚度比例因子, 即 $\mu^i = \mu^{i-1} - \delta$, 回到式(2) 继续运算.

3 数值算例

通过几个算例, 验证该方法的有效性和可靠性. 由于荷载的大小及材料的弹性模量 E 与优化结果无关, 因此其数值都取单位 1 (注: $P_1 = P_2$ 代表两种工况).

例 1 初始设计域长 $8a$, 宽 $5a$ 矩形板, 板左边固定, 右边自由, 右边上下两角点各有一个集中力, 采用 1262 个三角形单元进行划分. 例 1 的开孔位置如图 1 所示, 在多工况下体积的收敛过程如图 2 所

示,而其拓扑优化结果如图 3 所示.

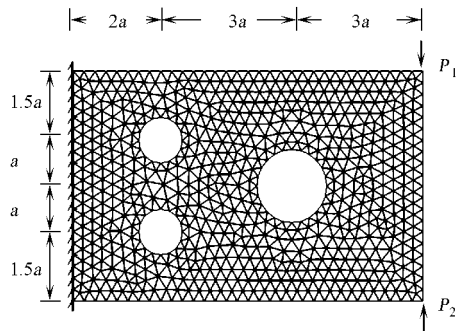


图 1 例 1 的力学模型及有限单元
Fig. 1 Mechanical model and
finite element of example 1

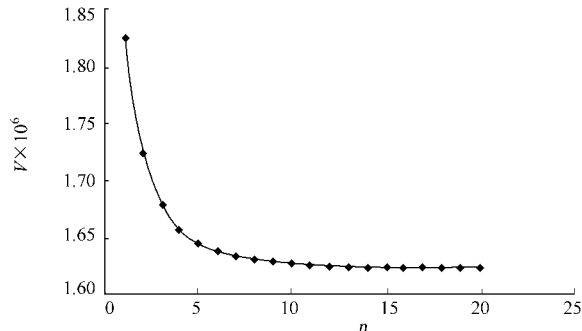


图 2 多工况下例 1 体积的收敛过程
Fig. 2 The convergence of volume
under multiple load example 1

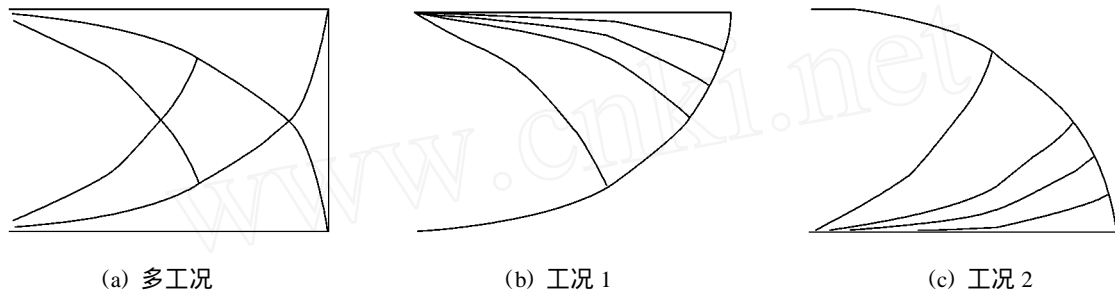


图 3 不同工况的例 1 拓扑优化结果

Fig. 3 Topology optimization under different load example 1

例 2 初始设计域长 $2a$, 宽 a 四角铰支的矩形板. 在中心有一个直径为 $0.5a$ 的圆孔, 在上下边的中间位置作用 2 个大小相等、方向相反的集中力. 例 2 的受力模型及单元划分如图 4 所示, 在多工况下体积的收敛过程如图 5 所示, 而其拓扑优化结果如图 6 所示.

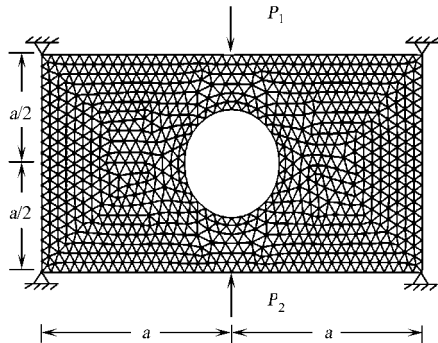


图 4 例 2 的受力模型及单元划分
Fig. 4 Mechanical model and
finite element of example 2

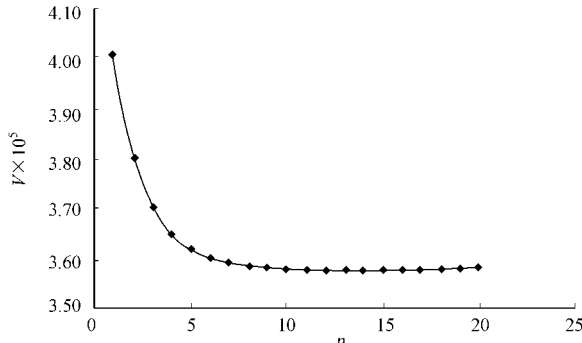


图 5 多工况下例 2 体积的收敛过程
Fig. 5 The convergence of volume
under multiple load example 2

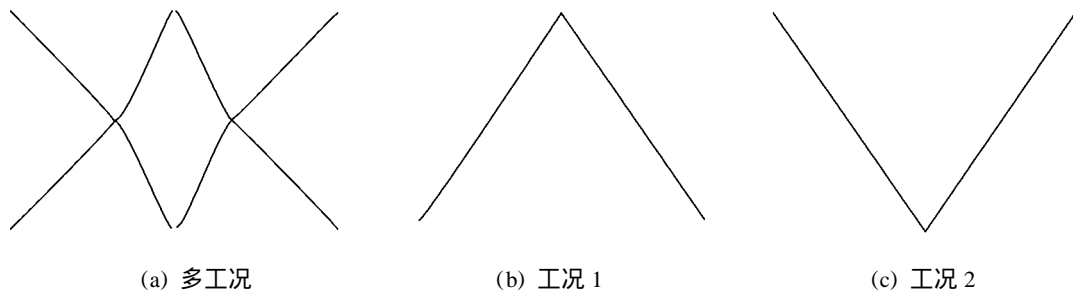


图 6 不同工况的例 2 拓扑优化结果

Fig. 6 Topology optimization under different load example 2

4 结束语

以杆件在结点位置的密度和方向作为设计变量,结点密度连续变化,不会出现单元铰接及棋盘格现象.针对矩形单元只能划分规则区域的局限性,而且不能很好逼近连续体的边界,提出采用三角形单元进行划分的方法.先计算出各个单工况下结点的弹性矩阵,然后拟和出多工况下的弹性矩阵.算例证明表明,该方法是合理的、有效的.

参考文献:

- [1] MICHELL A G M. The limits of economy of material in framestructure[J]. Philosophical Magazine, 1904, 8(6): 589-597.
- [2] COX H L. The design of structures of least weight[M]. Oxford: Pergamon, 1965.
- [3] HEGEMINER G A, PRAGER W. On Michell trusses[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1969, 11(2): 209-215.
- [4] ROZVANY G I N. Some shortcomings in Michell trusses theory[J]. Structural Optimization, 1996, 12(4): 244-250.
- [5] ROZVANY G I N. Partial relaxation of the orthogonality requirement for classical Michell trusses[J]. Structural Optimization, 1997, 13(4): 271-274.
- [6] 杨德庆, 隋允康. 桁架结构拓扑优化设计密度变量的两种模式[J]. 力学与实践, 1997, 19(5): 7-11.
- [7] BENDØE M P, DIAZ A R, LIPTON R, et al. Optimal design of material properties and material distribution for multiple loading conditions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, 38(7): 1149-1170.
- [8] 隋允康, 叶红铃, 彭细荣. 应力约束全局化策略下的连续体结构的拓扑优化[J]. 力学学报, 2006, 38(3): 364-370.
- [9] 隋允康, 彭细荣, 叶红铃. 应力约束全局化处理的连续体结构 ICM 拓扑优化方法[J]. 工程力学, 2006, 23(7): 1-7.
- [10] 王 键, 程耿东. 多工况应力约束下连续体结构拓扑优化设计[J]. 机械强度, 2003, 25(1): 55-57.
- [11] GUAN H S, GRANT P, XIE Y M. Evolutionary structural optimization incorporation tension and compression materials[J]. Advances in Structural Engineering, 1999, 2(4): 273-288.
- [12] 荣见华, 姜节胜. 基于应力及其灵敏度的结构拓扑渐进优化方法[J]. 力学学报, 2003, 35(5): 584-591.
- [13] 闫 凯, 周克民. 用三角形单元建立拓扑优化类桁架连续体[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2009, 30(2): 200-203.
- [14] ZHOU Ke-min, LI Xia. Topology optimization of structures under multiple load cases using fiber-reinforced composite material model[J]. Computational Mechanics, 2006, 38(2): 163-170.

Topology Optimization of Truss-Like Structures for Multiple Load Cases With Stress Constraints

YAN Kai, ZHOU Ke-min

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The densities and orientations of members at nodes are taken as design variables, the member orientations are adjusted to align the principal stress directions, checkerboard and mesh-dependencies disappear without any additional technique. Adopting the triangle elements to fill the design region, the difficulty to divide irregular design domain by rectangular elements is overcome. Fiber-reinforced orthotropic composite is employed as the material model to simulate the constitutive relation of truss-like continua, the topological optimum structure is suggested by the continuous lines, these continuous lines represent the actual distribution of members in the truss structures that it is intended to build. Two examples are used to demonstrate the rationality and efficiency of the presented method.

Keywords: topology optimization; stress constraints; multiple load cases; triangle element

(责任编辑: 钱 筠 英文审校: 方德平)