

文章编号: 1000-5013(2009)05-0593-03

逆极限空间的逐点伪轨跟踪性

吴志湖, 陈尔明

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 证明对于由 $\{X_i, \varphi_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ 生成的逆极限系统 (X_∞, f_∞) , 如果每个 f_i 具有逐点伪轨跟踪性, 则诱导映射 f_∞ 也具有逐点伪轨跟踪性. 举例证明, 它的逆命题不成立.

关键词: 逐点伪轨跟踪; 逆极限空间; 紧致度量空间; 伪轨跟踪

中图分类号: O 189.11

文献标识码: A

1 主要结论

设 (X, d) 为紧致度量空间, $f: X \rightarrow X$ 为连续映射.

(1) 如果对任意 $i \geq 0$, 有 $d(f^i(x_i), x_{i+1}) < \alpha$, 则 X 中的序列 $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ 称为 α 伪轨;

(2) 如果对任意的 $\beta > 0$, 存在 $\alpha > 0$, 使得对每个 α 伪轨 $\{x_i\}_{i=0}^\infty$, 存在 $x \in X$ 满足 $d(f^i(x), x_i) < \beta$ 对任意的 $i \geq 0$ 成立, 则称 (X, f) 具有伪轨跟踪性;

(3) 如果对任意的 $\beta > 0$, 存在 $\alpha > 0$, 使得对每个 α 伪轨 $\{x_i\}_{i=0}^\infty$, 存在 $x \in X$, $N \geq 0$, 使得 $d(f^i(x), x_{N+i}) < \beta$ 对任意的 $i \geq 0$ 成立, 则称 (X, f) 具有逐点伪轨跟踪性.

显然, 伪轨跟踪蕴含着逐点伪轨跟踪.

设 (X_i, d_i) , $i \in N$ 为紧致度量空间, $\varphi_i: X_{i+1} \rightarrow X_i$ 为连续映射, 有

$$X_\infty = \varprojlim \{X_i, \varphi_i\} = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in X_i, \varphi_i(x_{i+1}) = x_i, i \in N\},$$

X_∞ 称为由 $\{X_i, \varphi_i\}$ 生成的逆极限空间, φ_i 称为底映射. 作为乘积空间 $\prod_{i=1}^\infty X_i$ 的子空间, X_∞ 为紧致度量空间. X_∞ 上的一个相容度量 d_∞ 定义为

$$d_\infty(x, y) = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}.$$

其中, $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots) \in X_\infty$.

如果 $f_i: X_i \rightarrow X_i$ 为连续映射且满足

$$\varphi_i \circ f_{i+1} = f_i \circ \varphi_i, \quad i \in N,$$

则 f_i 诱导了 X_∞ 上的映射 f_∞ , 有

$$f_\infty(x_1, x_2, \dots) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots).$$

称 (X_∞, f_∞) 为由 $\{X_i, \varphi_i, f_i\}_{i=0}^\infty$ 生成的逆极限系统.

特别地, 如果 $X_i = X$, $f_i = \varphi_i = f$, $i \in N$, 则称

$$X_f = \varprojlim \{X, f\} = \{(x_1, x_2, \dots) : f(x_{i+1}) = x_i, i \in N\}$$

为由 (X, f) 生成的逆极限系统. 在这种特殊情形下, 诱导映射 f_∞ 为同胚, 即可称为逆极限空间上的转移同胚.

文[1]证明了一个底映射生成的逆极限空间上的转移同胚具有伪轨跟踪性, 当且仅当底映射具有

收稿日期: 2008-01-21

通信作者: 陈尔明(1951-), 男, 教授, 主要从事动力系统和分形几何的研究. E-mail: erming_chen@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(S0650017)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

伪轨跟踪性. 文[2]考虑一族底映射生成的逆极限系统的伪轨跟踪性, 得到了如下结论.

定理 A^[2] 设 $\{X_\infty, f_\infty\}$ 是由 $\{X_i, \varphi_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ 生成的逆极限系统, 如果每个 f_i 具有伪轨跟踪性, 则 f_∞ 具有伪轨跟踪性.

文[2]举例说明了上述定理的逆命题不成立.

文[3]定义了逐点伪轨跟踪性, 研究了逐点伪轨跟踪的一些性质. 同时, 证明了由一个同胚的底映射生成的逆极限空间上, 其转移同胚具有逐点伪轨跟踪性, 当且仅当底映射具有逐点伪轨跟踪性. 考虑一族底映射生成的逆极限系统的逐点伪轨跟踪性, 得到如下类似定理 A 的结论.

定理 1 设 $\{X_\infty, f_\infty\}$ 是由 $\{X_i, \varphi_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ 生成的逆极限系统, 如果每个 f_i 具有逐点伪轨跟踪性, 则 f_∞ 具有逐点伪轨跟踪性.

同时也说明了定理 1 的逆命题不成立.

2 定理 1 的证明

证明 假设 $\varphi_i: X_{i+1} \rightarrow X_i$ 为底映射, 对 $j \geq i$, 如果 $j = i$, 定义 $\varphi_{ji}: X_j \rightarrow X_i$ 为 $\varphi_{ji} = id$; 如果 $j > i$, $\varphi_{ji} = \varphi_i \circ \varphi_{i+1} \circ \dots \circ \varphi_{j-1}$. 设 X_∞ 是由 $\{X_i, \varphi_i\}$ 生成的逆极限空间.

对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $N > 0$, 使得 $\sum_{i=N+1}^\infty \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. 设 $\varepsilon_1 > 0$ 充分小, 使得 $x, y \in X_N, d_N(x, y) < \varepsilon_1$ 蕴含着

$d_i(\varphi_{Ni}(x), \varphi_{Ni}(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ 对任意 $i \leq N$ 成立. 由于 f_N 具有逐点伪轨跟踪性质, 所以存在 $\delta_1 > 0$, 使得 X_N 中的每个 δ_1 伪轨均可以被 X_N 中的某个点 ε_1 逐点伪轨跟踪. 取 $\delta > 0$, 使得 $2^N(1 + \text{diam}(X_N)) \delta < \delta_1$. 设 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 为 X_∞ 中的任意 δ 伪轨, 令 $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots)$, 由于对任意 $i \geq 0$, 有

$$\delta > d_\infty(f_\infty(x^i), x^{i+1}) \geq \frac{1}{2^N} \frac{d_N(f_N(x_N^i), x_N^{i+1})}{1 + d_N(f_N(x_N^i), x_N^{i+1})},$$

$$d_N(f_N(x_N^i), x_N^{i+1}) < \delta,$$

即 $\{x_N^i\}_{i=1}^\infty$ 为 X_N 中的 δ_1 伪轨. 从而存在 $y_N \in X_N$, 使得对某个整数 $m \geq 0$, $d_N(f_N^m(y_N), x_N^{m+i}) < \varepsilon$ 对任意 $i \geq 0$ 成立.

对 $j \leq N$, 令 $y_j = \varphi_{Nj}(y_N)$, 而取 $y_j (j > N)$, 使得

$$y = (y_1, \dots, y_N, y_{N+1}, \dots) \in X_\infty,$$

则 δ 伪轨 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 将被点 $y \in X_\infty$ 逐点伪轨跟踪. 这是因为对上述的 $m \geq 0$, 任意的 $j \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} d_\infty(f_\infty^j(y), x^{m+j}) &= \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} \frac{d_i(f_i^j(y_i), x_i^{m+j})}{1 + d_i(f_i^j(y_i), x_i^{m+j})} \leq \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2^i} \frac{d_i(f_i^j(y_i), x_i^{m+j})}{1 + d_i(f_i^j(y_i), x_i^{m+j})} + \frac{\varepsilon}{2} = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2^i} \frac{d_i(f_i^j(\varphi_{Ni}(y_N)), \varphi_{Ni}(x_N^{m+j}))}{1 + d_i(f_i^j(\varphi_{Ni}(y_N)), \varphi_{Ni}(x_N^{m+j}))} + \frac{\varepsilon}{2} = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2^i} \frac{d_i(\varphi_{Ni}(f_N^j(y_N)), \varphi_{Ni}(x_N^{m+j}))}{1 + d_i(\varphi_{Ni}(f_N^j(y_N)), \varphi_{Ni}(x_N^{m+j}))} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

故 $\{X_\infty, f_\infty\}$ 具有逐点伪轨跟踪性.

3 例子

命题 1 设 (X, d) 为紧致度量空间, id 为 X 上的恒同映射, 则 id 具有逐点伪轨跟踪性, 当且仅当 X 是完全不连通的.

证明 (1) 必要性. 设 X 不是完全不连通的, 则存在 X 的连通闭子集 F , 使得 $\text{diam}(F) = \varepsilon > 0^{[4]}$.

其中, $\text{diam}(F)$ 为 F 的直径. 因为 F 是紧致的, 所以存在 $x', y' \in F$, 使得 $d(x', y') = \varepsilon$. 令 $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}\varepsilon$. 由于

F 是连通的, 对任意的 $\delta > 0$, 可以构造 F 中从 x' 到 y' 的 δ 伪轨, 但伪轨不被 ε -逐点伪轨跟踪. 这就产生矛盾. 故当 id 具有逐点伪轨跟踪性时, X 是完全不连通的.

(2) 充分性. 设 X 是完全不连通的, 由文[5]的注记可知, id 具有伪轨跟踪性. 因为伪轨跟踪性蕴含逐点伪轨跟踪性, 所以, X 上 id 具有逐点伪轨跟踪性.

在文[2]中, 构造了如下的例子, 证明了定理 A 的逆命题不成立. 应用此例子说明定理 1 的逆命题不成立.

例 1 设 C 为 $[0, 1]$ 中的 Cantor 三分集, $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$, 其中 $X_1 = [0, 1] - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, 并且假设已经定义了 X_i , 则 X_{i+1} 是将 X_i 的每个连通分支分成 3 等分, 除去中间的开区间所得到的闭集. X_i 是 2^{i-1} 个闭区间的并, 将这些闭区间从左至右依次记为 $I(i, 1), \dots, I(i, 2^{i-1})$, 易见

$$I(i+1, 2j-1) \cup I(i+1, 2j) \subset I(i, j)$$

对 $1 \leq j \leq 2^{i-1}, i \in \mathbb{N}$ 成立.

定义映射 $\varphi_i: X_{i+1} \rightarrow X_i (i \in \mathbb{N})$, 而 φ_i 为线性映射. 对于 $1 \leq j \leq 2^{i-1}$, 它将 $I(i+1, 2j-1)$ 的左端点和 $I(i+1, 2j)$ 的右端点分别映到 $I(i, j)$ 的左右端点, 而将 $I(i+1, 2j-1)$ 的右端点和 $I(i+1, 2j)$ 的左端点都映到 $I(i, j)$ 的中点.

φ_i 为连续满射且易见 $\{X_i, \varphi_i\}$ 生成的逆极限空间 X_{∞} 同胚于 Cantor 三分集. 如果定义 $f_i: X_i \rightarrow X_i$ 为恒同映射, 则 $\varphi_i \circ f_{i+1} = f_i \circ \varphi_i$ 且 X_{∞} 上的诱导映射 f_{∞} 也是恒同映射.

由命题 1 可知, f_{∞} 具有逐点伪轨跟踪性, 而每个 f_i 均无逐点伪轨跟踪性.

参考文献:

- [1] CHEN Liang, LI Shi-hai. Shadowing property for inverse limit spaces[J]. Proc Amer Math Soc, 1992(115): 573-580.
- [2] 李思敏. 逆极限空间的伪轨跟踪性[J]. 数学年刊, 2001, 22(4): 479-482.
- [3] 李明军. 逐点伪轨跟踪性性质及其应用[J]. 数学研究与评论, 2005, 25(1): 23-30.
- [4] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [5] AOKI N. Topics in general topology[M]. New York: Elsevier Science Publishers, 1982: 925-740.

Pointwise Pseudo-Orbit Tracing Property for the Inverse Limit Spaces

WU Zhi-hu, CHEN Er-ming

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Let $\{X_{\infty}, f_{\infty}\}$ be the inverse limit system generated by $\{X_i, \varphi_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$. It is show that if every f_i has the Pointwise pseudo orbit tracing property, so does the derivative map f_{∞} . Example shows that the inverse proposition is not true.

Keywords: pointwise pseudo orbit tracing; inverse limit system; compact space; pseudo orbit tracing

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)