

文章编号: 1000-5013(2009)05-0590-03

对流-扩散方程的样条子域精细积分隐格式

徐金平, 单双荣

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 针对对流-扩散方程的初边值问题, 利用子域精细积分的思想, 结合三次样条函数逼近, 提出含参数 ($\gamma > 0$) 的一族无条件稳定的隐格式, 其局部截断误差阶为 $O(\tau + \tau^2 + h^2)$. 当参数 $0 < \gamma$ 时, 其精度相当于 $O(\tau^2 + h^2)$, 且可用三对角线追赶法容易地求解. 数值计算表明, 理论分析与实际例子相符合.

关键词: 对流-扩散方程; 样条函数; 子域精细积分; 稳定性; 隐格式

中图分类号: O 241.82

文献标识码: A

对流-扩散方程是描述粘性流体运动的非线性方程——Burgers 方程的线性化模型, 其本身也描述了许多自然现象, 如在水中和大气中污染物质浓度的扩散、沿海盐度、温度扩散等. 考虑对流-扩散方程初边值问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, & t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0, t) &= g_1(t), & u(L, t) = g_2(t), & t > 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式(1)中, γ 为常数, $\gamma > 0$ 为参数. 对于问题的数值解法, 文[1-4]介绍了解对流-扩散方程的若干显式与隐式方法, 但这些方法的局部截断误差阶仅为 $O(\tau + h)$ 或 $O(\tau + h^2)$, 且稳定性限制比较苛刻. 文[5]提出分组显式方法, 不仅无条件稳定, 还可以显式求解, 解决了一些不适合在并行机和向量机上实现算法的问题. 但是, 其局部截断误差阶仅为 $O(\tau + h^2 + \frac{1}{h})$. 本文利用子域精细积分的思想^[6-7], 结合三次样条函数逼近, 提出了含参数 $\gamma > 0$ 的无条件稳定的一族两层隐格式.

1 两个有用的样条插值关系式

设 x_i 为区间 $[a, b]$ 上的节点坐标, 有 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, $h_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). $u(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数, 且节点上的值表示为 $u(x_i) = u_i$.

m_i, M_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) 分别表示一阶和二阶导数在节点上的近似值, $S_{pm}(x)$ 和 $S_{pM}(x)$ 分别表示三次样条函数的 m 和 M 的表达式. 由文[8]有

$$\begin{aligned} S_{pm}(x) &= (1 + 2 \frac{x - x_{i-1}}{h_i}) (\frac{x_i - x}{h_i})^2 y_{i-1} + (1 + 2 \frac{x_i - x}{h_i}) (\frac{x - x_{i-1}}{h_i})^2 y_i + \\ &+ (x - x_{i-1}) (\frac{x_i - x}{h_i})^2 m_{i-1} + (x - x_i) (\frac{x - x_{i-1}}{h_i})^2 m_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

由于 $S_{pm}(x)$ 二阶导数连续, 因此, 在节点 x_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 处, 有 $S_{pm}''(x_i - 0) = S_{pm}''(x_i + 0)$. 如果取 $h = h_i = h_{i+1}$, 可得三次样条关系式为

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{3}{h} (u_{i+1} - u_{i-1}), \quad (3)$$

收稿日期: 2008-01-12

通信作者: 单双荣(1956-), 男, 副教授, 主要从事微分方程数值解的研究. E-mail: shansr@163.com.

基金项目: 国务院侨办科研基金资助项目(04QZR09)

$$\begin{aligned} \text{而} \quad S_{PM}(x) = & \frac{1}{6h_i} [(x_i - x)^3 M_{i-1} + (x - x_{i-1})^3 M_i] + (u_{i-1} - \frac{h_i^2}{6} M_{i-1}) \frac{x_i - x}{h_i} + \\ & (u_i - \frac{h_i^2}{6} M_i) \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (4)$$

用同样的方法,可得另一个三次样条关系式为

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = \frac{6}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}). \quad (5)$$

2 样条子域精细积分格式

取时间步长 τ , 空间步长 $h = L/M$, M 为正整数, 在节点 $(x_i, t_n) = (ih, n\tau)$ 处的数值解记为 u_i^n . 为了构造精度高且稳定性好的精细积分格式, 引入一个附加项 u_i ($\gamma > 0$ 是参数), 可得

$$\frac{du_i}{dt} + \gamma u_i = q \quad (6)$$

其中, $q = u_{xx} + u_x + u_i$. 如果 q 取为某一个常数, 则利用常数变易法可解得方程(6)的通解为

$$u_i(t) = Ce^{-\gamma t} + \frac{q}{\gamma}. \quad (7)$$

其中, C 是任意的常数. 由条件 $u_i(t_n) = u_i^n$, 确定该常数 C , 并将 $t = t_{n+1}$ 代入式(7). 经整理, 可得子域精细积分格式为

$$u_i^{n+1} = bu_i^n + \frac{1-b}{\gamma} q, \quad b = e^{-\gamma \tau} \quad (0, 1). \quad (8)$$

若按不同的方式给出 q 的值, 就会得到不同的子域精细积分格式. 引进三次样条函数来逼近 $u(x, t)$, 取

$$q = M_i^{n+1} + am_i^{n+1} + u_i^{n+1}.$$

将 q 代入式(8), 经整理可得

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1-b}{b} M_i^{n+1} + \frac{1-b}{b} am_i^{n+1}. \quad (9)$$

由式(11)可得

$$\begin{aligned} u_{i-1}^{n+1} + 4u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1} = & u_{i-1}^n + 4u_i^n + u_{i+1}^n + \\ & \frac{1-b}{b} (M_{i-1}^{n+1} + 4M_i^{n+1} + M_{i+1}^{n+1}) + \frac{1-b}{b} a(m_{i-1}^{n+1} + 4m_i^{n+1} + m_{i+1}^{n+1}). \end{aligned} \quad (10)$$

利用关系式(3), (5), 令 $\frac{1-b}{b} = \alpha$, 则式(10)可变形为

$$(1 - \frac{6}{h^2} + \frac{3}{h}) u_{i-1}^{n+1} + (4 + \frac{12}{h^2}) u_i^{n+1} + (1 - \frac{6}{h^2} - \frac{3}{h}) u_{i+1}^{n+1} = u_{i-1}^n + 4u_i^n + u_{i+1}^n. \quad (11)$$

该格式就是所构造的新的样条子域精细积分(SSPD)隐格式. 由 Taylor 展开容易求得格式(11)在 $(x_j, t_{n+1/2})$ 处的截断误差阶为 $O(\tau^2 + h^2)$. 可见, 当 $\tau, h \rightarrow 0$ 时, 格式(11)具有二阶精度.

根据稳定性分析的 Fourier 方法, 对格式(11)进行稳定性分析. 令 $u_j^n = e^{ij\theta}$, λ 是任意常数, $i = \sqrt{-1}$. 代入式(11), 经整理得传播因子为

$$\lambda = \frac{2\cos\theta + 4}{2\cos\theta + 4 + 12(1 - \cos\theta)/h^2 - i6\sin\theta/h}.$$

显然, $|\lambda| \leq 1$ 恒成立, 所以隐格式(11)无条件稳定.

3 数值例子

参照文[5]实际算例, 考虑如下的初边值问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= e^{(-1)t}, \quad u(1, t) = e^{-x+(-1)t}, \quad t > 0. \end{aligned} \right\}$$

其精确解为 $u(x,t) = e^{-x+(x-1)t}(0 \leq x \leq 1, t > 0)$. 取 $\tau = \pm 1, \Delta x = 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}, \Delta t = 0.001, h = 0.05$, 计算到 $N = 100$ 层. 将格式(11)与 S-AGE, S-ADE 格式^[5]的计算结果进行对比, 如表 1 所示. 从表 1 可知, 格式(11)数值结果要优于文[5]格式的计算结果, 说明理论分析与实际例子相符合.

表 1 格式计算结果比较表

Tab. 1 Comparing table					
	x_j	$u(x,t)$	S-AGE 格式	S-ADE 格式	格式(11)
1	10^{-1}	0.15	0.786 63	0.908 26	0.907 68
		0.50	0.554 33	0.653 22	0.651 53
		0.85	0.390 63	0.447 26	0.446 61
	10^{-3}	0.15	0.778 88	0.927 61	0.927 51
		0.50	0.548 87	0.648 28	0.647 95
		0.85	0.386 78	0.447 51	0.447 40
-1	10^{-1}	0.15	0.960 79	0.954 17	0.951 90
		0.50	0.677 06	0.653 29	0.651 57
		0.85	0.477 11	0.453 09	0.452 21
	10^{-3}	0.15	0.951 32	0.947 95	0.947 24
		0.50	0.670 39	0.648 28	0.647 95
		0.85	0.472 41	0.447 51	0.447 40

华侨大学数学科学学院曾文平教授给予悉心指导, 特此致谢.

参考文献:

[1] 陆金甫. 对流-扩散方程的一些单调性差分格式[J]. 计算物理, 1991, 8(2): 157-164.
[2] 黄 铎. 求解扩散-对流方程的一个差分格式[J]. 数值计算与计算机应用, 1986, 7(1): 29-34.
[3] 金承日, 丁效华. 解一维和二维对流扩散方程的块 ADI 方法[J]. 计算物理, 1998, 15(1): 114-120.
[4] 陆金甫, 关 治. 偏微分方程数值解法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 97-105.
[5] 曾文平. 对流-扩散方程若干 AGE 格式及其稳定性[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 1999, 20(3): 123-130.
[6] 钟万勰. 子域精细积分及偏微分方程数值解[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, 12(3): 253-260.
[7] 钟万勰. 单点子域积分与差分[J]. 力学学报, 1996, 28(2): 159-163.
[8] 邓建中, 刘之行. 计算方法[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001: 78-84.

Spline Sub-Domain Precise Integration Implicit Scheme
for Solving Convection-Diffusion Equation

XU Jin-ping, SHAN Shuang-rong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Based on sub-domain precise integration method and combined the cubic spline function approximation, a double-layer implicit scheme containing parameter $\gamma > 0$ for the initial-boundary value problem of convection-diffusion equation is presented. It is shown that this implicit scheme is unconditionally stable, and the order of local truncation error of the present method is $O(\tau^2 + \tau^2 + h^2)$. When the parameter satisfies $0 < \gamma < 1$, the order of local truncation error equals to $O(\tau^2 + h^2)$ which can be simply solved by triple diagonal pursuit method. The numerical calculus is consistent with theoretical analysis.

Keywords: convection-diffusion equation; spline sub-domain precise integration; stability; implicit scheme

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)