第30卷 第5期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 30 No. 5
2009年9月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Sep. 2009

文章编号: 1000-5013(2009)05-0585-05

量子环面上的斜导子李代数模的导子

温琴珠

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 记 L 为量子环面上的斜导子李代数, 研究李代数 L-模的导子集的结构. 通过对导子集中的元素的线性分析, 得到从 L 到 L-模 $F_g^{\alpha}(V)$ 的导子, 以及一上同调群 $H^1(L, F_g^{\alpha}(V))$.

关键词: 斜导子; 李代数; 模; 量子环面; 一上同调群
中图分类号: O 152.5 文献标识码: A

无穷维李代数在 Dual Resonance Model 中, 以及在孤立子理论、科特韦格-德弗里斯方程和其他可积系统的构造等方面应用较为广泛. 在无穷维李代数中, Virasoro 代数是另一类非常重要的代数. 量子环面的导子李代数与 Virasoro 代数的推广存在着密切的联系, 量子环面的斜导子李代数 L 是量子环面的导子李代数的子代数. 李代数理论中对于导子的研究, 其重要性体现在它们与低维上同调群之间的紧密关系上, 通过对它们的研究, 可以构造出或实现许多有意义的李代数. 对每个线性李代数的表示, 文[1]具体地构造出交换结合代数上导子李代数的子代数全形的一类表示. 文[2]研究了 Larsson 函子的像的结构, 即文[1]中构造的, 与一般线性李代数 gl_n 的表示相对应的交换结合代数的全体导子构成的李代数的一类表示. 文[3]构造了一族从特殊线性李代数 sl_2 的模到 L 的模函子 F_g^{α}, 并刻画了 $F_g^{\alpha}(V)$ 的结构. 本文在对 q 是 p 次本原单位根时, 给出了 L-模 $F_g^{\alpha}(V)$ 的导子及一上同调群, 包含了文[4]的结果.

1 预备知识

定义 1 设 G 是一个交换群, $L=\bigoplus_{x\in G}L_x$ 是一个 G-分次李代数, $V=\bigoplus_{x\in G}V_x$ 是一个 G-分次 L-模. 一个线性映射 $D: L\rightarrow V$, 如果它满足

$$D([u,w]) = u\cdot D(w) - w\cdot D(u), \qquad u, w\in L, \tag{1}$$

则称 D 为一个导子. 如果导子 D 满足 $D(u)=u\cdot v$, $u\in L$ ($v\in V$ 是固定的), 则称 D 为一个内导子. 如果 $D(V_y)\subset V_{x+y}$, $\forall_y\in G$, 则称导子 D 是 x 次的.

引用记号 $\mathrm{Der}(L, V)$ 和 $\mathrm{Inn}(L, V)$ 表示导子空间和内导子空间, 用 $\mathrm{Der}(L, V)_x$ 表示 x 次的导子空间. 李代数 L 在模 V 上的一上同调群 $H^1(L, V)\sim \mathrm{Der}(L, V)/\mathrm{Inn}(L, V)$.

对任意的非负整数 p, 设 q 为 p 次本原单位根. 记 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1)$, $\Gamma=\mathbf{Z}\boldsymbol{e}_1+\mathbf{Z}\boldsymbol{e}_2$, $\Gamma^*=\Gamma\setminus(0,0)$, $\Gamma_1=p\Gamma$, $\Gamma_2=\Gamma\setminus\Gamma_1$, $\mathscr{U}=\mathbf{C}\boldsymbol{e}_1+\mathbf{C}\boldsymbol{e}_2$, $L'=\langle D(\boldsymbol{m})\mid \boldsymbol{m}\in\Gamma^*\rangle$, d_1, d_2 是两个符号, $L=L'\oplus\langle d_1, d_2\rangle$, 约定 $D(\boldsymbol{0})=0$.

定义 L 上的双线性运算为

$$[D(\boldsymbol{m}), D(\boldsymbol{n})] = g(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})D(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}),$$
$$[d_i, D(\boldsymbol{m})] = -[D(\boldsymbol{m}), d_i] = m_iD(\boldsymbol{m}),$$
$$[d_1, d_2] = 0$$

其中, $i=1,2$, $\boldsymbol{m}=m_1\boldsymbol{e}_1+m_2\boldsymbol{e}_2\in\Gamma^*$, $\boldsymbol{n}=n_1\boldsymbol{e}_1+n_2\boldsymbol{e}_2\in\Gamma^*$, 而

收稿日期: 2008-01-27
通信作者: 温琴珠(1975-), 女, 讲师, 主要从事李代数的研究. E-mail: wqzl46@hqu.edu.cn.
基金项目: 华侨大学科研基金资助项目(06HZR05)

$$g(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})=\begin{cases}q^{m_2n_1}-q^{m_1n_2}, & \text{当 } \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\notin\Gamma_1,\\ m_2n_1-m_1n_2, & \text{其他.}\end{cases}$$

L 就是一个量子环面上斜导子李代数, 且是一个 $\mathbf{Z}^2$ 分次的李代数.

定义 2[3] 对 $\forall\alpha\in\mathscr{U}$, $\forall sl_2$-模 V 和 $\forall\boldsymbol{n}\in\Gamma$, 设 $V(\boldsymbol{n})$ 是一个同构于 V 的向量空间. 因此, 定义一个映射: F_g^α: sl_2-模 $\to$ L-模, 则有

$$V\mapsto F_g^\alpha(V)=\oplus_{n\in\Gamma}V(\boldsymbol{n}).$$

L 在模 $F_g^\alpha(V)$ 上的作用定义为

$$D(\boldsymbol{m})\cdot v(\boldsymbol{n})=\begin{cases}\sigma(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})(g(\boldsymbol{m})-f(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}))v(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}), & \boldsymbol{m}\in\Gamma_2,\\ (\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}+\alpha)v(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})+A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{m})v(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}), & \boldsymbol{m}\in\Gamma_1.\end{cases}$$

$$d_i\cdot v(\boldsymbol{n})=(n_i+\alpha_i)v(\boldsymbol{n}),\qquad i=1,2$$

其中, σ, f 为从 $\Gamma\times\Gamma$ 到 $\mathbf{C}$ 的两个映射. 有

$$\sigma(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})=q^{n_2m_1},$$
$$f(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})=q^{n_2m_1-n_1m_2},$$

g 为从 Γ 到 $\mathbf{C}$ 的函数, 满足

$$g(\boldsymbol{n})g(\boldsymbol{m})=g(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}),\qquad\forall\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\in\Gamma,$$

且

$$g(\boldsymbol{s})=1,\qquad\forall\boldsymbol{s}\in\Gamma_1,$$
$$\boldsymbol{u}=(m_2,-m_1),$$
$$A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{m})=-m_1^2e+m_2^2f+m_1m_2h.$$

其中, e, f, h 是 sl_2 的 Chevalley 基. 显然, L 的模 $F_g^\alpha(V)$ 是一个 $\mathbf{Z}^2$ 分次的模.

2 主要结果和引理

设 e, f, h 是 sl_2 的 Chevalley 基, V 是李代数 sl_2 的一个不可约 t 维模, 它的基为 $v_1, v_2, \cdots, v_t$. 所有下标 j 没有特别说明都是指 $j=1,2,\cdots,t$.

引理 1 $hv_j=(t+1-2j)v_j$; $fv_j=jv_{j+1}$; $ev_j=(t-j+1)v_{j-1}$. 规定: $v_0=v_{t+1}=0$

定理 1[5] 设 G 是一个交换群. 如果 $L=\bigoplus_{x\in G}L_x$ 是一个有限生成的 G-分次李代数, 并且 V 是一个 G-分次 L-模, 那么, $\mathrm{Der}(L,V)=\bigoplus_{x\in G}\mathrm{Der}(L,V)_x$.

主要结果为

定理 2 (1) 如果 $\alpha\in\mathscr{U}$, 并且不存在 $\boldsymbol{s}\in\Gamma$, 使得 $g(\boldsymbol{m})\equiv f(\boldsymbol{s},\boldsymbol{m})$, 那么, 有 $\mathrm{Der}(L,F_g^\alpha(V))=\mathrm{Inn}(L,F_g^\alpha(V))$.

(2) 如果 $\alpha\in\mathscr{U}$ 并且存在 $\boldsymbol{s}\in\Gamma$, 使得 $g(\boldsymbol{m})\equiv f(\boldsymbol{s},\boldsymbol{m})$, 那么, (a) 当 $-\alpha-\boldsymbol{s}\in\Gamma_2$ 时, $\mathrm{Der}(L,F_g^\alpha(V))=\mathrm{Inn}(L,F_g^\alpha(V))$; (b) 当 $-\alpha-\boldsymbol{s}\in\Gamma_1$, $t=1$ 时, $\mathrm{Der}(L,F_g^\alpha(V))=\langle\zeta_1,\zeta_2,\chi_1,\chi_2\rangle\oplus\mathrm{Inn}(L,F_g^\alpha(V))$. 其中,

$$\zeta_i(d_j)=0,$$
$$\zeta_i(D(\boldsymbol{m}))=\begin{cases}m_iv_1(\boldsymbol{m}-\alpha), & \boldsymbol{m}\in\Gamma_1,\\ 0, & \boldsymbol{m}\in\Gamma_2.\end{cases}$$
$$\chi_i(d_j)=\delta_{i,j}v_1(-\alpha),$$
$$\chi_i(D(\boldsymbol{m}))=0,\qquad i,j=1,2.$$

当 $-\alpha-\boldsymbol{s}\in\Gamma_1$, $t=2$ 时, $\mathrm{Der}(L,F_g^\alpha(V))=\langle\zeta\rangle\oplus\mathrm{Inn}(L,F_g^\alpha(V))$. 其中,

$$\zeta(d_1)=\zeta(d_2)=0,$$
$$\zeta(D(\boldsymbol{m}))=\begin{cases}q^{r_2(m_1-1)}m_1v_1(\boldsymbol{m}-\alpha)+q^{r_2(m_1-1)}m_2v_2(\boldsymbol{m}-\alpha), & \boldsymbol{m}\in\Gamma_2,\\ 0, & \boldsymbol{m}\in\Gamma_1.\end{cases}$$

当 $-\alpha-\boldsymbol{s}\in\Gamma_1$, $t=4$ 时, $\mathrm{Der}(L,F_g^\alpha(V))=\langle\eta\rangle\oplus\mathrm{Inn}(L,F_g^\alpha(V))$, 其中

$$\eta(d_1)=\eta(d_2)=0,$$
$$\eta(D(\boldsymbol{m}))=m_1^3v_1(\boldsymbol{m}-\alpha)+m_1^2m_2v_2(\boldsymbol{m}-\alpha)+m_1m_2^2v_3(\boldsymbol{m}-\alpha)+m_2^3v_4(\boldsymbol{m}-\alpha).$$

当 $-\alpha-\boldsymbol{s}\in\Gamma_1$, $t\geqslant3$, 并且 $t\neq4$ 时, $\mathrm{Der}(L,F_g^\alpha(V))=\mathrm{Inn}(L,F_g^\alpha(V))$.

由定理 2, 可设 $\mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))=\bigoplus_{r\in\mathbf{Z}^2}\mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_r$. 对 $D_r\in\mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_r$, 可设

$$D_r(D(\boldsymbol{m}))=\sum_{j=1}^{t}\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})v_j(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{m}),\tag{2}$$

$$D_r(d_i)=\sum_{j=1}^{t}\varphi_{i,j}(\boldsymbol{r})v_j(\boldsymbol{r}),\qquad i=1,2,\tag{3}$$

其中, $\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})$是一个从 $\Gamma\times\Gamma$ 到 $\mathbf{C}$ 的映射, $\varphi_{i,j}(\boldsymbol{r})$是从一个 Γ 到 $\mathbf{C}$ 的映射. 为了方便, 记 $\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{0})=0$, $\psi_{t+1}(t,\boldsymbol{m})=0=\psi_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})$, $\varphi_{i,t+1}(\boldsymbol{r})=\varphi_{i,0}(\boldsymbol{r})=0$.

由引理 1 及定义 2 有

$$A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{m})v_j=-m_1^2(t-j+1)v_{j-1}+m_2^2jv_{j+1}+m_1m_2(t+1-2j)v_j,\tag{4}$$

$$A(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{n})v_j=-n_1^2(t-j+1)v_{j-1}+n_2^2jv_{j+1}+n_1n_2(t+1-2j)v_j,\tag{5}$$

其中, $\boldsymbol{u}=(m_2,-m_1)$, $\boldsymbol{u}'=(n_2,-n_1)$.

在式(1)中, 令 $u=D(\boldsymbol{m})$, $w=D(\boldsymbol{n})$, 再将式(2)代入, 并结合式(4), (5), 可得到

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})=\;&\sigma(\boldsymbol{m},\boldsymbol{r}+\boldsymbol{n})(g(\boldsymbol{m})-f(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}))\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})-\\&\sigma(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}+\boldsymbol{m})(g(\boldsymbol{n})-f(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}))\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}),\qquad \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\Gamma_2,\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})=\;&\sigma(\boldsymbol{m},\boldsymbol{r}+\boldsymbol{n})(g(\boldsymbol{m})-f(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}))\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})-\\&(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{r}+\boldsymbol{m}+\alpha)\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})-n_1n_2(t+1-2j)\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})+\\&n_1^2(t-j)\psi_{j+1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})-n_2^2(j-1)\psi_{j-1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}),\qquad \boldsymbol{m}\in\Gamma_2,\quad \boldsymbol{n}\in\Gamma_1,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})=\;&(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}+\boldsymbol{n}+\alpha)\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})+\\&m_1m_2(t+1-2j)\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})-m_1^2(t-j)\psi_{j+1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})+m_2^2(j-1)\psi_{j-1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})-\\&\sigma(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}+\boldsymbol{m})(g(\boldsymbol{n})-f(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}))\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}),\qquad \boldsymbol{m}\in\Gamma_1,\quad \boldsymbol{n}\in\Gamma_2,\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})=\;&(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}+\boldsymbol{n}+\alpha)\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})+m_1m_2(t+1-2j)\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})-\\&(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{r}+\boldsymbol{m}+\alpha)\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})-n_1n_2(t+1-2j)\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})-m_1^2(t-j)\psi_{j+1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})+\\&m_2^2(j-1)\psi_{j-1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})+n_1^2(j-1)\psi_{j+1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})-n_2^2(j-1)\psi_{j-1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}),\qquad \boldsymbol{m},\quad \boldsymbol{n}\in\Gamma_1.\end{aligned}\tag{9}$$

在式(1)中, 令 $u=d_i$, $w=D(\boldsymbol{m})$, 再将式(2), (3)代入可得到

$$(r_i+\alpha_i)\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})=\sigma(\boldsymbol{m},\boldsymbol{r})(g(\boldsymbol{m})-f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m}))\varphi_{i,j}(\boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{m}\in\Gamma_2,\quad i=1,2.\tag{10}$$

$$\begin{aligned}(r_i+\alpha_i)\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})=\;&(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}+\alpha)\varphi_{i,j}(\boldsymbol{r})+m_1m_2(t+1-2j)\varphi_{i,j}(\boldsymbol{r})-\\&m_1^2(t-j)\varphi_{i,j+1}(\boldsymbol{r})+m_2^2(j-1)\varphi_{i,j-1}(\boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{m}\in\Gamma_1,\quad i=1,2.\end{aligned}\tag{11}$$

在式(1)中, 令 $u=d_1$, $w=d_2$, 再将式(3)代入可得到

$$(r_1+\alpha_1)\varphi_{2j}(\boldsymbol{r})-(r_2+\alpha_2)\varphi_{1j}(\boldsymbol{r})=0.\tag{12}$$

由上面的讨论可以看到, 所有的函数 $\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})$, $\varphi_{i,j}(r)$都由方程(6)~(12)决定, 可以通过这些方程来推导出导子 $D_r(\boldsymbol{r}\in\Gamma)$. 由上述方程结合线性代数知识可得到以下引理, 证明过程略.

引理 2　当 $\boldsymbol{r}+\alpha\neq\boldsymbol{0}$ 时, $\dim\mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_r\leqslant t$.

引理 3　当 $\boldsymbol{r}+\alpha=\boldsymbol{0}$ 时, 对 $\forall\boldsymbol{m}=m_1\boldsymbol{e}_1+m_2\boldsymbol{e}_2\in\Gamma^*$, $\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})$, $j=1,2,\cdots,t$, 可由 $\psi_j(\boldsymbol{r},m_1\boldsymbol{e}_1)$, $\psi_j(\boldsymbol{r},m_2\boldsymbol{e}_2)$ $(j=1,2,\cdots,t)$线性表示.

引理 4　如果 $\boldsymbol{r}+\alpha=\boldsymbol{0}$, 而且有(1) 当 $g(\boldsymbol{e}_2)\neq q^{-r_1}$时, 对 $\forall m_1,m_2\in\mathbf{Z}$, $\psi_j(\boldsymbol{r},m_1\boldsymbol{e}_1)$, $\psi_j(\boldsymbol{r},m_2\boldsymbol{e}_2)$, $j=1,2,\cdots,t$, 都可由 $\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_2)$ $(j=1,2,\cdots,t)$ 线性表示.

(2) 当 $g(\boldsymbol{e}_1)\neq q^{r_2}$时, 对 $\forall m_1,m_2\in\mathbf{Z}$, $\psi_j(\boldsymbol{r},m_1\boldsymbol{e}_1)$, $\psi_j(\boldsymbol{r},m_2\boldsymbol{e}_2)$, $j=1,2,\cdots,t$, 都可由 $\psi_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1)$ $(j=1,2,\cdots,t)$线性表示.

(3) 当 $g(\boldsymbol{e}_1)=q^{r_2}$, $g(\boldsymbol{e}_2)=q^{-r_1}$时, 对 $\forall m_1,m_2\in\mathbf{Z}$ 有如下 4 种情形.

当 $t=1$ 时, $\psi_1(\boldsymbol{r},m_1\boldsymbol{e}_1)$, $\psi_1(\boldsymbol{r},m_2\boldsymbol{e}_2)$可由 $\psi_1(\boldsymbol{r},p\boldsymbol{e}_1)$, $\psi_1(\boldsymbol{r},p\boldsymbol{e}_2)$线性表示.

当 $t=2$ 时, $\psi_j(\boldsymbol{r},m_1\boldsymbol{e}_1)$, $\psi_j(\boldsymbol{r},m_2\boldsymbol{e}_2)$, $j=1,2$, 可由 $\psi_1(\boldsymbol{r},p\boldsymbol{e}_1)$, $\psi_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_2)$, $\psi_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1)$线性表示.

当 $t=4$ 时, $\psi_j(\boldsymbol{r},m_1\boldsymbol{e}_1)$, $\psi_j(\boldsymbol{r},m_2\boldsymbol{e}_2)$, $j=1,2,3,4$, 可由 $\psi_1(\boldsymbol{r},p\boldsymbol{e}_1)$, $\psi_2(\boldsymbol{r},p\boldsymbol{e}_1)$, $\psi_2(\boldsymbol{r},p\boldsymbol{e}_2)$, $\psi_3(\boldsymbol{r},p\boldsymbol{e}_1)$和 $\psi_3(\boldsymbol{r},p\boldsymbol{e}_2)$线性表示.

当 $t=3$ 或 $t\geqslant 5$ 时, $\psi_j(\boldsymbol{r},m_1\boldsymbol{e}_1)$, $\psi_j(\boldsymbol{r},m_2\boldsymbol{e}_2)$, $j=1,2,\cdots,t$, 可由 $\psi_j(\boldsymbol{r},p\boldsymbol{e}_1)$, $\psi_2(\boldsymbol{r},p\boldsymbol{e}_2)$ $(j=1,2,\cdots,t-1)$线性表示.

引理 5 如果 $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 时,

(1) 如果 $g(\boldsymbol{e}_1)\neq q^{r_2}$ 或 $g(\boldsymbol{e}_2)\neq q^{-r_1}$, 则 $\varphi_{1,j}(\boldsymbol{r})=\varphi_{2,j}(\boldsymbol{r})=0, j=1,2,\cdots,t$.

(2) 如果 $g(\boldsymbol{e}_1)=q^{r_2}$ 且 $g(\boldsymbol{e}_2)=q^{-r_1}$, 当 $t=1$ 时, $\varphi_{1,1}(\boldsymbol{r})$, $\varphi_{2,1}(\boldsymbol{r})$可取任意复数; 当 $t\neq 1$ 时, $\varphi_{1,j}(\boldsymbol{r})=\varphi_{2,j}(\boldsymbol{r})=0, j=1,2,\cdots,t$.

引理 6 如果 $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 或 $\exists\,\boldsymbol{m}=m_1\boldsymbol{e}_1+m_2\boldsymbol{e}_2\in\Gamma^*$, 使得 $g(\boldsymbol{e}_1)^{m_1}g(\boldsymbol{e}_2)^{m_2}\neq f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})$ 或 $\forall\,\boldsymbol{m}=m_1\boldsymbol{e}_1+m_2\boldsymbol{e}_2\in\Gamma$, $g(\boldsymbol{e}_1)^{m_1}g(\boldsymbol{e}_2)^{m_2}\equiv f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})$ 且 $t\geqslant 3$ 时; 如果 $\dim \mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}\leqslant t$, 则 $\dim \mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}=t$, 并且 $\mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}=\mathrm{Inn}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}$.

3 定理 3 的证明

3.1 分 2 种情形讨论

情形 1 $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, 由引理 2 可知, $\dim \mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}\leqslant t$. 再由引理 6 可得, $\dim \mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}=t$, 并且 $\mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}=\mathrm{Inn}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}$.

情形 2 $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 即 $r_1=-\alpha_1$, $r_2=-\alpha_2$. 因为不存在 $\boldsymbol{s}\in\Gamma$, 使得 $g(\boldsymbol{m})=f(\boldsymbol{s},\boldsymbol{m})$, 所以 $g(\boldsymbol{e}_1)=q^{r_2}$ 和 $g(\boldsymbol{e}_2)=q^{-r_1}$ 两式必有一个不成立, 即 $g(\boldsymbol{e}_2)\neq q^{-r_1}$ 或 $g(\boldsymbol{e}_1)\neq q^{r_2}$. 当 $g(\boldsymbol{e}_2)\neq q^{-r_1}$, 则由引理 3, 引理 4(1), 引理 5(1)可知, $\dim \mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}\leqslant t$; 当 $g(\boldsymbol{e}_1)\neq q^{r_2}$, 则由引理 3, 引理 4(2), 引理 5(1)可知

$$\dim \mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}\leqslant t.$$

再由引理 6 可得

$$\dim \mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}=t,$$
$$\mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}=\mathrm{Inn}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}.$$

由以上讨论可知

$$\mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}=\mathrm{Inn}(L,F_g^{\alpha}(V)).$$

3.2 分 3 种情形讨论

情形 1 $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 时, 同节 3.1 中情形 1.

情形 2 $\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{\alpha}$ 且 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}\in\Gamma_2$, 不妨设 $p\nmid r_1-s_1$, 则 $g(\boldsymbol{e}_2)=q^{-s_1}\neq q^{-r_1}$, 由引理 3, 引理 4(1), 引理 5(1), 可知

$$\dim \mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}\leqslant t.$$

再由引理 6 可得

$$\dim \mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}=t,$$
$$\mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}=\mathrm{Inn}(L,F_g^{\alpha}(V))_{\boldsymbol{r}}.$$

情形 3 $\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{\alpha}$ 且 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}\in\Gamma_1$, 即 $p\mid r_1-s_1$, $p\mid r_2-s_2$, 且 $g(\boldsymbol{e}_1)=q^{r_2}$, $g(\boldsymbol{e}_2)=q^{-r_1}$, 由引理 3, 引理 4(3), 引理 5(2)可知, 当 $t=1$ 时, $D_{-\alpha}$ 由 $\varphi_1(\boldsymbol{r})$, $f_1(\boldsymbol{r})$, $\psi_1(-\boldsymbol{\alpha},p\boldsymbol{e}_1)$, $\psi_2(-\boldsymbol{\alpha},p\boldsymbol{e}_2)$定义, 因此

$$\dim \mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{-\alpha}\leqslant 4.$$

令
$$\zeta_i(d_j)=0,\ \zeta_i(D(\boldsymbol{m}))=\begin{cases} m_i v_1(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\alpha}), & \boldsymbol{m}\in\Gamma_1,\\ 0, & \boldsymbol{m}\in\Gamma_2,\end{cases}$$
$$\chi_i(d_j)=\delta_{i,j}v_1(-\boldsymbol{\alpha}),\ \chi_i(D(\boldsymbol{m}))=0,\qquad i,j=1,2.$$

易证, ζ_1, ζ_2, χ_1, χ_2 是线性无关的外导子. 所以, 有

$$\dim \mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{-\alpha}=4,$$
$$\mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{-\alpha}=\langle\zeta_1,\zeta_2,\chi_1,\chi_2\rangle.$$

当 $t=2$ 时, $D_{-\alpha}$ 由 $\psi_1(-\boldsymbol{\alpha},p\boldsymbol{e}_1)$, $\psi_2(-\boldsymbol{\alpha},p\boldsymbol{e}_2)$, $\psi_1(-\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_1)$定义, 因此

$$\dim \mathrm{Der}(L,F_g^{\alpha}(V))_{-\alpha}\leqslant 3.$$

令
$$\zeta_i(d_1)=\zeta_i(d_2)=0,\ \zeta_i(D(\boldsymbol{m}))=\begin{cases} 0, & \boldsymbol{m}\in\Gamma_2,\\ m_i^2 v_i(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\alpha})+m_1m_2v_{3-i}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\alpha}), & \boldsymbol{m}\in\Gamma_1,\quad i=1,2,\end{cases}$$
$$\zeta_3(d_1)=\zeta_3(d_2)=0,\ \zeta_3(D(\boldsymbol{m}))=\begin{cases} q^{r_2(m_1-1)}m_1v_1(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\alpha})+q^{r_2(m_1-1)}m_2v_2(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\alpha}), & \boldsymbol{m}\in\Gamma_2,\\ 0, & \boldsymbol{m}\in\Gamma_1.\end{cases}$$

易证, ζ_1, ζ_2 是线性无关的内导子, ζ_3 是外导子. 所以, 有

$$\dim \mathrm{Der}(L, F_g^\alpha(V))_{-\alpha} = 3,$$

$$\mathrm{Der}(L, F_g^\alpha(V))_{-\alpha} = \langle \zeta_3 \rangle \oplus \mathrm{Inn}(L, F_g^\alpha(V))_{-\alpha};$$

当 $t=4$ 时, $D_{-\alpha}$ 由 $\phi_1(\boldsymbol{r}, p\boldsymbol{e}_1)$, $\phi_2(\boldsymbol{r}, p\boldsymbol{e}_1)$, $\phi_2(\boldsymbol{r}, p\boldsymbol{e}_2)$, $\phi_3(\boldsymbol{r}, p\boldsymbol{e}_1)$ 和 $\phi_3(\boldsymbol{r}, p\boldsymbol{e}_2)$ 定义, 所以 $\dim \mathrm{Der}(L, F_g^\alpha(V))_{-\alpha} \leqslant 5$. 令

$$\eta_1(d_1) = \eta_1(d_2) = 0,$$

$$\eta_1(D(\boldsymbol{m})) = m_1^3 v_1(\boldsymbol{m}-\alpha) + m_1^2 m_2 v_2(\boldsymbol{m}-\alpha) + m_1 m_2^2 v_3(\boldsymbol{m}-\alpha) + m_2^3 v_4(\boldsymbol{m}-\alpha),$$

$$\eta_j(d_1) = d_1 \cdot v_j(-\alpha) = 0, \qquad \eta_j(d_2) = d_2 \cdot v_j(-\alpha) = 0,$$

$$\eta_j(D(\boldsymbol{m})) = D(\boldsymbol{m}) \cdot v_j(-\alpha), \qquad j = 2, 3, 4, 5.$$

易证, $\eta_j (j = 1, 2, 3, 4, 5)$ 是线性无关的导子. 其中, $\eta_j (j = 2, 3, 4, 5)$ 是内导子. 所以, 当 $t=4$ 时, 有

$$\dim \mathrm{Der}(L, F_g^\alpha(V))_{-\alpha} = 5,$$

$$\mathrm{Der}(L, F_g^\alpha(V))_{-\alpha} = \langle \eta_1 \rangle \oplus \mathrm{Inn}(L, F_g^\alpha(V))_{-\alpha};$$

当 $t=3$, $t \geqslant 5$ 时, $D_{-\alpha}$ 由 $\phi_j(\boldsymbol{r}, p\boldsymbol{e}_1)$, $\phi_2(\boldsymbol{r}, p\boldsymbol{e}_2)$, $j = 1, \cdots, t-1$ 定义, 所以, 有 $\dim \mathrm{Der}(L, F_g^\alpha(V))_{-\alpha} \leqslant t$. 令

$$\tau_j(d_1) = d_1 \cdot v_j(-\alpha) = 0, \qquad \tau_j(d_2) = d_2 \cdot v_j(-\alpha) = 0,$$

$$\tau_j(D(\boldsymbol{m})) = D(\boldsymbol{m}) \cdot v_j(-\alpha).$$

易证, $\tau_j (j = 1, 2, \cdots, t)$ 是 $\mathrm{Der}(L, F_g^\alpha(V))_{-\alpha}$ 中线性无关的内导子. 所以, 有

$$\dim \mathrm{Der}(L, F_g^\alpha(V))_{-\alpha} = t,$$

$$\mathrm{Der}(L, F_g^\alpha(V))_{-\alpha} = \mathrm{Inn}(L, F_g^\alpha(V))_{-\alpha}.$$

推论 1 (1) 如果 $\alpha \in \mathscr{U}$, 并且不存在 $\boldsymbol{s} \in \Gamma$, 使得 $g(\boldsymbol{m}) \equiv f(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{m})$, 那么, 有 $\dim H^1(L, F_g^\alpha(V)) = 0$.

(2) 如果 $\alpha \in \mathscr{U}$, 并且存在 $\boldsymbol{s} \in \Gamma$, 使得 $g(\boldsymbol{m}) \equiv f(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{m})$. 那么, 有(a) 当 $-\alpha-\boldsymbol{s} \in \Gamma_2$ 时, $\dim H^1(L, F_g^\alpha(V)) = 0$; (b) 当 $-\alpha-\boldsymbol{s} \in \Gamma_1$, $t=1$ 时, $\dim H^1(L, F_g^\alpha(V)) = 4$; (c) 当 $-\alpha-\boldsymbol{s} \in \Gamma_1$, $t=2$, $t=4$ 时, $\dim H^1(L, F_g^\alpha(V)) = 1$; (d) 当 $-\alpha-\boldsymbol{s} \in \Gamma_1$, $t \geqslant 3$ 并且 $t \neq 4$ 时, $\dim H^1(L, F_g^\alpha(V)) = 0$.

参考文献:

[1] SHEN Guang-yu. Graded modules of graded Lie algebras of cartan type(Ⅰ)[J]. Scientica Sinica, 1986, 29(6): 570-581.

[2] RAO S E. Irreducible reqresentations of the Lie-algebra of the diffeomorphisms of ad-dimensional torus[J]. J Alg, 1996, 182(2): 401-421.

[3] 林卫强, 谭绍滨. 量子环面上斜导子李代数的表示[J]. 数学进展, 2005, 34(4): 477-487.

[4] WANG Q, TAN S. First cohomology group from the virasoro-like algebra to its larsson functor module[J]. Comm Alg, 2007, 35(12): 4163-4174

[5] FARNSTEINER R. Derivations and central extentions of finitely generated graded Lie algebras[J]. J Alg, 1988, 118(1): 33-45.

The Derivations From the Lie Algebra of Skew Derivations on Quantum Torus to Its Modules

WEN Qin-zhu

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Denote the skew derivation Lie algebra over the rank 2 quanturn torus by L, the structure of the derivations of modules over Lie algebra L is studied. By the analysis of linear relationships among derivations, we obtain the derivations from L to L-modules $F_g^\alpha(V)$ and give the first cohomology group $H^1(L, F_g^\alpha(V))$.

Keywords: skew derivation; Lie algebra; modules; quantum torus; the first cohomology group

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)