

文章编号: 1000-5013(2009)05-0487-05

分数阶在磁流变液性能研究中的应用

陈丙三, 黄宜坚

(华侨大学 机电工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 将分数阶微积分引入 Maxwell 粘弹性流体的本构方程中, 建立修正的 Maxwell 模型以描述磁流变液. 通过储能模量和耗能模量曲线, 研究磁流变液的阻尼特性. 在不同的磁流变液体组成参数实验条件下, 理论的储能模量和耗能模量能够与实验结果很好拟合, 且模型阶数有着明显变化. 研究表明, 分数阶的本构方程能够很好地描述磁流变液的阻尼特性, 方程分数阶算子与磁流变液物质参数有关.

关键词: 磁流变液; 分数阶; 本构方程; Maxwell 模型

中图分类号: TB 381; TB 112

文献标识码: A

磁流变液(Magnetorheological Fluids)是一种由基液和悬浮粒子组成的人工合成流体, 可以通过外加磁场来调节其流体粘性^[1-2]. 在力学上, 它常表现出粘弹性, 即力学性能介于粘滞性和弹性之间, 同时具有弹性固体和粘性流体的性质. 磁流变材料分子链组成的网络在受到剪切时, 铁磁粒子发生错动和松弛, 使能量耗散而产生“阻尼”效应. 目前, 经常采用在交变应力作用下发生滞后现象和力学耗散, 来研究粘弹性材料的阻尼效应. 分析粘弹性材料在交变应力作用下的阻尼特性, 对于减小振动、降低噪声等工程实际应用有很大帮助. 磁流变液的这一特性, 使其在工业应用中具有广泛的前景. 目前, 非牛顿流体的研究类型繁多, 特性各异, 很难用一个本构方程去描述所有的广义牛顿流体, 因而出现了多种粘弹性流体的本构关系模型, 如 Maxwell 模型、Kelvin-Voigt 模型、Jeffreys 模型、二阶流体模型和 Oldroyd-B 流体模型等. 这些模型都是唯现象论而导出的, 它们只是针对某一类流体而近似地描述其应力与应变关系, 很难在全频域内刻画其流变特性. 近几年来, 很多学者把分数阶微积分引入了粘弹性流体的本构关系的描述上^[3-7]. Song 等^[8]将分数阶微积分应用到粘弹性胶体的实验数据中, 获得了较为满意的结果. 同登科等^[9]将分数阶微积分引入了对管内 Oldroyd-B 型流体本构关系的探讨中, 建立了带分数阶微积分的广义 Jeffreys 模型. 本文将分数阶微积分引入 Maxwell 粘弹性流体的本构方程中, 探讨磁流变液在该模型下的物质特性.

1 分数阶导数的定义

分数阶微积分的概念几乎是和整数阶微积分概念同时出现的, 但由于长期没有应用背景而发展缓慢^[10-11]. 近年来, 分数阶微积分在粘弹性力学、分形理论上的应用得到了进一步研究. 分数阶微积分的定义被多数人所采纳的是 Riemann-Liouville 分数阶微积分, 即

$${}_a D_t^q f(t) = \frac{1}{(n-q)!} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^t (t-\tau)^{(n-q)-1} f(\tau) d\tau, \quad n-1 < q < n, \quad (1)$$

式(1)中, Γ 为伽马函数. 在工程中应用较多的是 Caputo 定义, 有

$${}_a^C D_t^q f(t) = \frac{1}{(n-q)!} \int_a^t (t-\tau)^{(n-q)-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad n-1 < q < n. \quad (2)$$

Riemann-Liouville 分数阶微积分和 Caputo 分数阶微积分的定义, 都是时域内对函数 $f(x)$ 的定义.

收稿日期: 2008-04-23

通讯作者: 黄宜坚(1945-), 男, 教授, 主要从事机电系统设计与控制的研究. E-mail: yjhuang@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省高新技术开发研究计划重点项目(2005H035)

Riemann-Liouville 分数导数的 Laplace 变换,涉及到分数阶积分的初始值与 Riemann-Liouville 分数微积分的初始值.虽然可求出含 Riemann-Liouville 分数导数的解,但是很难给这些解赋予合理的物理意义^[12].Caputo 分数阶微积分定义的最大优点是,其初始值与整数阶微积分一样具有明确的物理意义.

由此给出分数阶微积分的定义为

$$D_t^q f(t) = \frac{d^n}{dt^n} (D_t^{q-n} f(t)), \quad 0 < n - p < 1. \quad (3)$$

式(3)也可改写为

$$D_t^q f(t) = \frac{d^q f}{dt^q}. \quad (4)$$

用式(4)表示函数 $f(t)$ 的 q 阶微积分,且运算性质为

$$\frac{d^p}{dt^p} \frac{d^q}{dt^q} = \frac{d^{p+q}}{dt^{p+q}}. \quad (5)$$

式(5)中, p, q 可以是任意有理数.

2 磁流变液的分阶本构方程

2.1 分数阶模型意义

采用分数阶导数的流变模型理论,是以弹簧、牛顿粘壶为基本元件,其基本单元的本构方程可以用一个合成的分数阶本构方程进行描述.即

$$\sigma = p D_t^a \epsilon, \quad 0 < a < 1. \quad (6)$$

式(6)中, p 是比例因数.当 $a=0$ 时,式(6)变为 Hook 定理, $p=E$, 即为弹性系数;当 $a=1$ 时,式(6)变为牛顿流体, $p=\eta$, 即为动力黏度,如图 1 所示.少数几个元件的串联和并联的组合就可以组合成 Maxwell 模型、Jeffreys 模型和 Kelvin-Voigt 模型等,且与实验结果很好吻合^[12].

2.2 本构方程

通常的广义粘弹性流体的 Maxwell 模型具有本构关系,即

$$\sigma + \frac{d\sigma}{dt} = \eta_0 \frac{d\epsilon}{dt}. \quad (7)$$

式(7)中, σ 为剪切应力, ϵ 为剪切应变, η_0 为屈服时间, η_0 为磁流变液的零剪切粘度,跟磁场强度有关. Maxwell 模型是线性模型.为了描述系统的非线性,将分数阶微积分引入粘弹性流体的本构方程,得到具分数阶微积分型的修正 Maxwell 模型(图 2),有

$$\sigma + \frac{d\sigma}{dt} = \eta_0 \frac{d\epsilon}{dt}. \quad (8)$$

其中, α 和 β 为分数阶微积分参数,且满足 $0 < \alpha, \beta < 1$.假如 $\alpha > \beta$, 则松弛函数是递增的.这是不合理的,故必须要求 $\alpha < \beta$.当 $\alpha = \beta = 1$ 时,即简化为通常的 Maxwell 模型;而当 $\alpha = 0, \beta = 1$ 时,则可简化为经典的牛顿流体本构方程.

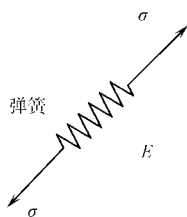


图 1 粘弹性的流变元素

Fig. 1 Rheological elements of viscoelasticity

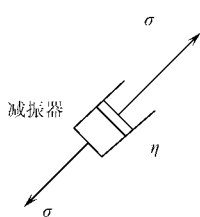


图 2 修正 Maxwell 模型

Fig. 2 Modified Maxwell model

引入 Laplace 变换,函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换定义为

$$L\{D^n f(t)\} = s^n L\{f(t)\} = s^n \bar{f}(s). \quad (9)$$

由式(9)可得

$$\bar{\sigma}(s)(1 + \eta_0 s) = \eta_0 s \bar{\epsilon}(s),$$

或

$$\frac{\bar{G}(s)}{\bar{G}(s)} = \frac{0s}{1+s} \tag{10}$$

粘弹性材料通常用耗散能来衡量粘弹性材料的阻尼效果,即用贮能模量(一般情况下)衡量弹性性能,用耗能模量衡量阻尼性能. 于是,根据式(10),令

$$E^*(\omega) = \left. \frac{\bar{G}(s)}{\bar{G}(s)} \right|_{s=i\omega} = \frac{0(i\omega)}{1+(i\omega)}, \tag{11}$$

则可得出磁流变液的贮能模量和耗能模量分别为

$$E' = 0 \frac{\cos \frac{\omega}{2} + \cos \frac{\omega}{2}(\dots)}{1+2 \cos \frac{\omega}{2} + \dots}, \tag{12}$$

$$E'' = 0 \frac{\sin \frac{\omega}{2} + \sin \frac{\omega}{2}(\dots)}{1+2 \cos \frac{\omega}{2} + \dots}. \tag{13}$$

由式(12),(13)可知,内耗因子 $\tan \delta = E''/E'$, 为损耗角, $0^\circ < \delta < 90^\circ$; 其值越接近 0° ; 说明物质的弹性越强; 反之, 则说明物质的粘性越强. 由流变学基本理论^[13]可知, 动态粘度 $\eta' = E'/\omega$, 虚粘度 $\eta'' = E''/\omega$.

3 实验结果及讨论

磁流变液体性能测试实验,是在自制的碟片式磁流变仪上进行的,测试仪器采用具有实时监测性的虚拟仪器及配套的测试软件平台(美国 NI 公司). 工作原理如图 3 所示,结果如图 4,5 所示. 实验环境:控制电流 I 为 0.05 A,温度 t 为 20℃,采样周期为 2 ms,流变仪动静碟片间距 h 为 1.4 mm. 仅以此间距实验结果为例.

从图 3 可知,工作部分是一对平行板,主动盘在步进电机的带动旋转,下盘固定, h 为主动盘与固定盘的间隙高度. 实验时,在间隙内充满磁流变液,主动盘以角速度 Ω 旋转时,具有粘性的磁流变液体在主动盘的拖动下呈现扭转拖拽流动. 通过转速转矩传感器,测量转动轴的转速和扭矩,进而推算出不同剪切速率下的剪切应力. 所用磁流变液的分散粒子的直径远远小于间距 h ,即

$$d_p/h \ll 1. \tag{14}$$

式(14)中, d_p 是分散粒子的直径,边界上的界面效应可忽略. 当间距很小 ($h/R \ll 1$), 或者在低旋转速度下,惯性可忽略.

在相同温度,不同磁场、不同切应变速率、不同板间间隙 (h 变化) 条件下,对自行配置的磁流变液在进行动态测试. 实验磁流变液选择二甲基硅油作为基液,异丙醇和硅烷偶联剂作为表面活性剂,分散相是微米级的羟基铁粉. 配制了含不同羟基铁粉质量分数 (w) 的磁流变液 MR-1,MR-2 和 MR-3,并对这 3 种流变体进行实验.

当 Ω 为 25 rad·s⁻¹ 时,磁流变流体随着控制电流的改变,剪切力也发生相应的变化,如图 4 所示. 其中,中间的过渡段是由于人为调动电流产生抖动所致. 由此可见,该流变仪对于磁流变性能的测试是有效的. 通过实验的结果,拟合出 3 种配方下的修正 Maxwell 模型的相关参数,如表 1 所示.

在角速度为 13 rad·s⁻¹ 时,磁场控制电流由 0 A 突变到 0.05 A,MR-2 磁流变液由一种应力状态转化成另一种应力状态,其屈服时间如图 5 所示. 根据实验结果,磁流变液 MR-1,MR-2,MR-3 的屈服时间分别为 1.83,2.04,2.12 s.

在不同的角速度下,测得 3 种磁流变液的动态粘度 (η')、虚粘度 (η'') 的变化曲线,如图 6 所示. 由图

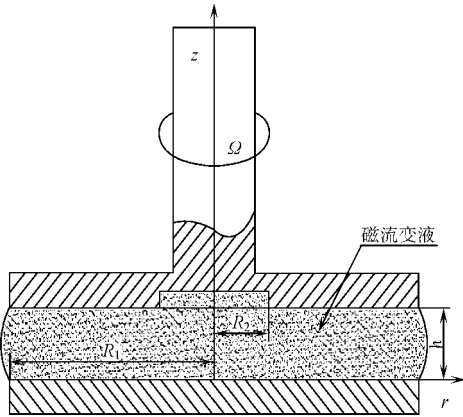


图 3 碟片式流变仪的平板结构
Fig. 3 Parallel-plate structure for dish rheometer

6 的理论曲线可知,当角速度接近零时,动态粘度、虚粘度为无穷大.比较图 6(a),(b),(c)可知,动态粘度、虚粘度在角速度的变化曲线上有一最小值.通过计算,可以得到最小值位于角速度为 $1 \sim 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 区间内.

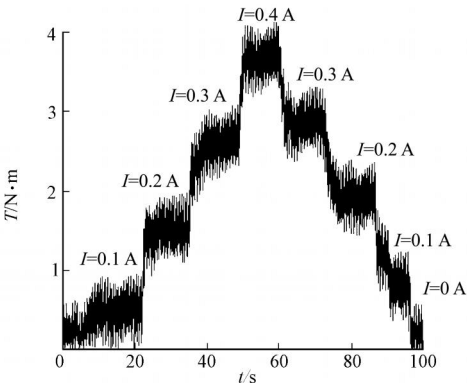


图 4 磁流变液剪切应力随电流变化

Fig.4 The shearing stress of the MRF vs the variation of current

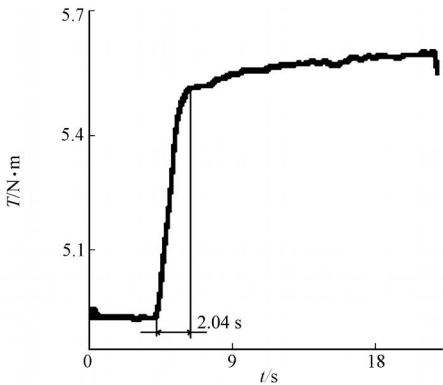


图 5 MR2 屈服时间

Fig.5 MR2's yield time

表 1 修正的 Maxwell 模型参数

Tab.1 The parameters of the Maxwell model					
流变体	w/ %	/ s		$\sigma/\text{Pa} \cdot \text{s}$	
MR-1	70	1.83	0.38	1.4	0.51
MR-2	74	2.04	0.50	2.2	0.50
MR-3	78	2.12	0.45	3.5	0.51

由图 6 可知,实验的结果与理论曲线有很好的拟合关系.在实际测量过程中会出现环境温度及工作温度的改变,故所测得的实验值应小于理论值.由于设备功能的缺陷,对于小范围角速度的变化曲线是无法通过实验结果验证的.但是,当角速度大于 $4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 时,就可以通过实验得到准确的验证.

由图 6 还可以知道,随着铁粉质量分数的增加,磁流变液零剪切粘度增大(理论曲线与实验数据的趋势相似).对于同一种材料配方的磁流变液在相同的角速度下,其贮能模量大于耗能模量,且理论曲线与实验数据基本吻合.在相同的角速度下,虚粘度越大,说明磁流变液的贮能能力越大,是节能型软物质.这一特性有助推广磁流变液在工程中的应用.此外,虚粘度越大,也说明磁流变液的耗能能力越强.

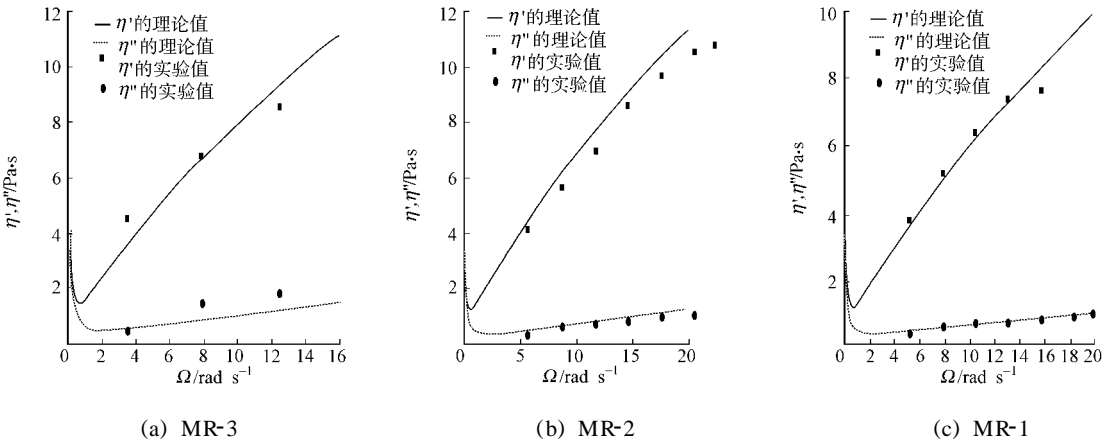


图 6 磁流变液动态粘度和虚粘度与角速度的关系曲线

Fig.6 Dynamic viscosity and imaginary viscosity of MR fluids vs angular velocity

4 结论

由于磁流变液是一种复杂的智能软物质,在对其性能的描述中,分数阶模型跟整数阶模型有着各自的优势,分数阶模型复杂但更精确.因此,采用分数阶模型的思路是对磁流变液性能研究的另一种研究方法.通过分数阶模型,可以很容易地求出磁流变液的贮能模量与耗能模量,这对磁流变液性能研究提

供很大的方便.

通过实验可知,在描述磁流变液的剪切粘度 出现困难,必须找到一种解决方法,也就是说,必须找到剪切粘度 与动态粘度 、虚粘度 之间的关系. 根据 Cox-Merz 规则^[13]可知,剪切粘度 与复粘度 $\bar{\eta} = \sqrt{\eta'^2 + \eta''^2}$ 几乎是重合的,问题可以得到很好的解决.

所提出的采用分数阶导数的磁流变模型理论,其实质上是以非线性 Abel 粘壶代替经典模型理论中的 Newton 粘壶. 它将分数微积分理论和经典流变模型理论统一起来,使得模型的物理概念更明确. 给出修正的 Maxwell 本构方程复模量,可用于研究磁流变液体的阻尼特性. 分数阶导数流变模型理论克服了经典模型理论与实验结果吻合不好的缺点,仅采用很少几个元件组合就可获得很好的效果. 在很宽广的频率范围内,其动态模量可以与实验数据很好地吻合. 用分数阶本构方程来描述磁流变液,对于磁流变器件的设计与开发,以及研究非线性的磁流变振动系统的控制具有特别的意义.

参考文献:

- [1] RABINOW J. The magnetic fluid clutch[J]. AIEE Transaction, 1948, 67: 1308-1315.
- [2] 司 鹤,彭向和. 磁流变材料的流变性能研究[J]. 材料科学与工程, 2002, 20(1): 61-63.
- [3] FRIEDRICH C H R. Relaxation and retardation functions of the Maxwell model with fractional derivatives[J]. Rheol Acta, 1991, 30(2): 151-158.
- [4] 黄军旗,刘慈群. 双筒流变仪中广义二阶流体运动分析[J]. 中国科学:A 辑, 1996, 26(10): 912-920.
- [5] 谭文长,鲜 峰,魏 兰. 广义二阶流体非定常 Couette 流动的精确解[J]. 科学通报, 2002, 7(16): 1226-1228.
- [6] 徐明瑜,谭文长. 广义二阶流体分数阶反常扩散速度场、应力场及涡旋层的理论分析[J]. 中国科学:A 辑, 2001, 31(7): 626-638.
- [7] 徐明瑜,谭文长. 黏弹性材料本构方程的广义分数阶单元网格表述及其广义解[J]. 中国科学:A 辑, 2002, 32(8): 673-681.
- [8] SONG D Y, JIANG T Q. Study on the constitutive equation with fractional derivative for the viscoelastic fluids-modified Jeffreys model and its application[J]. Rheologica Acta, 1998, 37(5): 512-517.
- [9] 同登科,王瑞和,杨河山. 管内非 Newton 流体分数阶流动的精确解[J]. 中国科学:G 辑, 2005, 35(3): 318-326.
- [10] ROSS B. Lecture notes in mathematics 457: Fractional calculus and its applications[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
- [11] OLDHAM KB, SPANIER J. The fractional calculus[M]. New York: Academic Press, 1974.
- [12] 张为民,张淳源,张 平. 考虑老化的混凝土粘弹性分数导数模型[J]. 应用力学学报, 2004, 21(1): 1-4.
- [13] 江体乾. 化工流变学[M]. 上海:华东理工大学出版社, 2004.

Application of Fractional Calculus on the Study of Magnetorheological Fluids' Characterization

CHEN Bing-san, HUANG Yi-jian

(College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Fractional calculus is introduced to study the constitutive equation of Maxwell viscoelasticity fluids, and establish the modified Maxwell model to describe the magnetorheological fluids (MR fluids for short). The curves for storage modulus and loss modulus are used here for the analysis of the damping characteristics of magnetorheological fluids. Under the different experiment conditions about the constituent parameters for MR fluids, the theoretical storage modulus and loss modulus can fit the corresponding experimental ones well, and the orders of the model are changed remarkably. It is indicated that the fractional calculus constitutive equation is available to describe the damping characteristics, and the fractional operators are connected to the parameters of the MR fluids.

Keywords: magnetorheological fluids; fractional calculus; constitutive equations; modified Maxwell model

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 郑亚青)