

文章编号: 1000-5013(2009)04-0476-02

高阶 Levi 方程的 Painlevé 测试和精确解

邓 勇, 张金顺

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 利用 Painlevé 分析的方法, 将高阶 Levi 方程进行奇异流型展开. 利用调谐因子项将其进行有限项“截断”, 证明其具有 Painlevé 可积性, 导出其 Darboux-Bäcklund 变换和奇异流型所满足的 Schwarz 导数方程. 通过求解 Schwarz 方程, 得到高阶 Levi 方程组的一类精确解.

关键词: 高阶 Levi 方程组; Painlevé 测试; 调谐因子; 相容性; Schwarz 导数

中图分类号: O 241.82

文献标识码: A

1 Painlevé 测试

在孤立子理论中, 已经有多种方法用来判定非线性偏微分方程的可积性质. 例如, Lax 对方法、无穷守恒律与 Hamilton 结构、无穷维 Lie 代数、Hirota 双线性方法、Painlevé 分析的方法等^[1-3]. 对于高阶 Levi 方程组

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + \frac{3}{2}vv_{xx} + \frac{3}{2}v_x^2 + \frac{3}{2}v_2u_x - \frac{3}{2}u^2u_x + 3uvw_x, \\ v_t = \frac{1}{4}v_{xxx} + \frac{3}{2}vu_{xx} + \frac{15}{2}v^2v_x + \frac{3}{2}v_xu_x - \frac{3}{2}u^2v_x - 3uvw_x, \end{cases} \quad (1)$$

令其解的奇异流型展式为 $u = \sum_{i=0}^{\infty} u^i \varphi^{i-\alpha}$, $v = \sum_{j=0}^{\infty} v^j \varphi^{j-\beta}$. 其中, $u^i, v^j, \varphi(i, j = 0, 1, 2, \dots)$ 均为 x, t 的连续可微函数, $\varphi(x, t) = 0$ 称为奇异流型, α, β 为待定常数. 利用 Painlevé 测试程序, 得到主导项因子 $\alpha = \beta = 1$;

利用行列式方程
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4}(k-1)(k-2)(-3) & \frac{3}{2}k(k-3) \\ \frac{3}{2}(k-3)^2 & \frac{1}{4}(k-3)(k^2-3k+20) \end{vmatrix} = 0,$$
 得出调谐因子 $k = -2, -1, 3$,

4, 5. 比较 φ 同次幂的系数, 容易得出

$$u_0 = \varphi_x, \quad v_0 = \varphi_x \quad u_1 = -\frac{1}{2} \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x}, \quad v_1 = -\frac{1}{2} \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x}. \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \varphi_x \varphi_{xxx} - \frac{3}{4} \varphi_{xx}^2 = -\varphi_x \varphi_t - 3v_2 \varphi_x^3, \\ \frac{1}{2} \varphi_x \varphi_{xxx} - \frac{3}{4} \varphi_{xx}^2 = -\varphi_x \varphi_t - \frac{9}{2} v_2 \varphi_x^3 - \frac{9}{2} u_2 \varphi_x^3. \end{cases} \quad (3)$$

如果取 $v_2 = u_2 = 0$, 则有

$$\frac{\varphi_t}{\varphi_x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x} \right)^2 = 0 \quad (4)$$

其中, $\ell \left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x} \right) = \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x} - \frac{3}{2} \left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x} \right)^2$ 称为 Schwarz 导数.

收稿日期: 2008-08-02

通信作者: 张金顺(1956-), 男, 教授, 主要从事孤立子理论的研究. E-mail: jszhang@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871165); 国务院侨办科研基金资助项目(06QZR12); 华侨大学高层次人才科研启动项目(07BS106)

由于调谐因子 $k = -2, -1, 3, 4, 5$, 故选取 $u_i = v_i = 0 (i = 3, 4, 5)$. 经过较繁琐验证, 可得出: $u_i = v_i = 0 (i \geq 2)$. Painlevé 奇异流型展式可以被成功截断, 即有

$$u = u^0 \varphi^1 + u^1, \quad v = v^0 \varphi^1 + v^1. \tag{5}$$

u_1, v_1 要求满足高阶 Levi 方程组(1). 式(4), (5)即为高阶 Levi 方程组(1)的 Darboux-Backlund 变换.

定理 1 高阶 Levi 方程组(1)是 Painlevé 可积的.

定理 2 高阶 Levi 方程组(1)具有 Darboux-Backlund 变换表达式(4), (5).

对于与式(4)类似的另外两组解: $u_0 = \frac{1}{2} \varphi_x, v_0 = \pm \frac{1}{2} \varphi_x; u_0 = -\frac{3}{2} \varphi_x, v_0 = \pm \frac{1}{2} \varphi_x$, 所对应的 Painlevé 分析将另文进行讨论.

2 高阶 Levi 方程的精确解

引理 设 y_1, y_2 为常微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x)y = 0$ 的两个线性无关解, 则 $w = \frac{y_1}{y_2}$ 满足 Schwarz 导数方程 $\{w; x\} = 2Q(x)$.

令 $Q(x) = -\lambda(t) = \text{const.}$ 由引理可解得 $\frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x)y = 0$ 的两个线性无关解.

- (1) 当 $\lambda \geq 0$ 时, $y_1 = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, y_2 = C_3 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_4 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.
(2) 当 $\lambda < 0$ 时, $y_1 = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, y_2 = C_3 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_4 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. 其中, C_1, C_2, C_3, C_4 为任意常数, 而且满足关系 $C_1 C_4 \neq C_2 C_3$. 从而, 有 $w = \frac{y_1}{y_2}$, 满足 $\{w; x\} = -2\lambda$ 由此可得 $\frac{\varphi}{\varphi_x} = \lambda$

令 $\varphi = \varphi(x + kt) = w(x + kt)$, 由 w 的表达式可得 $k = \lambda$, 则当 $\lambda \geq 0$ 时, φ 有指数形式的解: $\varphi = \frac{C_1 e^{\sqrt{\lambda}\xi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{C_3 e^{\sqrt{\lambda}\xi} + C_4 e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}$; 而当 $\lambda < 0$ 时, φ 有三角函数形式的解: $\varphi = \frac{C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\xi} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\xi}}{C_3 e^{\sqrt{-\lambda}\xi} + C_4 e^{-\sqrt{-\lambda}\xi}}$. 其中, $\xi = x + \lambda t$. 从而

Levi II 方程(1)的一个精确解为 $u = -\frac{1}{2}(\ln \varphi_x)_x + \varphi_x, v = -\frac{1}{2}(\ln \varphi_x)_x + \varphi_x$. 其中, φ 已由上面解出.

参考文献:

[1] WU Yong-tang, ZHANG Jir-shun Quasi-periodic solution of a new (2+1)-dimensional coupled equation[J]. J Phys (A): Math Gen, 2001, 34(1): 193-210.
[2] WEISS J, TABOR M, CARNEVALE G. The Painlevé property for partial differential equations[J]. J Math Phys, 1983, 24(6): 522-526.
[3] STEEB W H. Nonlinear evolution equations and Painlevé test[J]. New Jersey: World Scientific, 1998.

The Painlevé Test for Higher Order Levi Equation and Its Solution

DENG Yong, ZHANG Jir-shun

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Using Painlevé test, the higher order Levi equation is considered. The integrable property is proved, and the Darboux-Backlund transformation of the equation is obtained. Some exact solutions of the equation are gotten by means of Schwarzian derivative equation.

Keywords: higher order Levi equation; Painlevé test; resonances; consistency; Schwarzian derivative

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)