第30卷 第4期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 30 No. 4
2009年7月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 2009

文章编号: 1000-5013(2009)04-0468-05

回归时间局部熵的多重分形谱的上界估计

吴志湖, 陈尔明

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究关于回归时间的局部熵的多重分形谱, 利用广义熵和熵容量得到关于回归时间的局部熵的多重分形谱的两种上界估计. 同时, 研究回归时间的局部熵的多重分形谱的定义域.

关键词: 回归时间; 局部熵; 多重分形谱; 上界估计

中图分类号: O 174.12　　文献标识码: A

多重分形分析是分形几何的一个重要研究方向. 以往的多重分形分析, 主要研究 Borel 测度 μ 的局部维数(如果极限存在), 即 $d_\mu(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\log \mu[B(x,\varepsilon)]}{\log \varepsilon}\right\}$. 其中, $B(x,\varepsilon)$ 为 x 处的 ε 开邻域. 研究的目的是为了描述具有相同逐点维数的点的集合. 为此, 文[1]引进了多重分形谱 $f(\alpha)$. 多重分形谱为函数 $f(\alpha)=\dim_H(\{x: d_\mu(x)=\alpha\})$, $\dim_H$ 为豪斯道夫维数. 后来, 越来越多的学者推广了此过程, 如文[2-4]定义了关于回归时间的局部熵, 并研究了其多重分形谱的一些性质. 本文研究关于回归时间的局部熵的多重分形谱的上界估计, 以及局部熵的取值范围(即分形谱的定义域).

1 非紧致集合的拓扑熵

Bowen[5] 把拓扑熵推广到非紧致集合或非不变集的情况上, Pesin[6] 给出了一个等价的定义.

设 $f: X\to X$ 为非空紧致度量空间 (X,d) 上的连续映射, $\Lambda=\{U_1,\cdots,U_M\}$ 为 X 的一个有限开覆盖. 定义一个串 U 为一个序列 $U_{i_1},\cdots,U_{i_n}$, 其中 $i_k\in\{1,\cdots,M\}$. 串 U 的长度 n 记为 $n(U)$, 所有长为 n 的串组成的集合记为 $W_n(\Lambda)$, 且记 $W_{\geqslant n}(\Lambda)=\bigcup_{k\geqslant n}W_k(\Lambda)$. 对任意的 $U\in W_n(\Lambda)$, 定义

$$X(U)=U_{i_1}\cap f^{-1}U_{i_2}\cap\cdots\cap f^{-n+1}U_{i_n}=\{x\in X: f^{k-1}x\in U_{i_k}, k=1,\cdots,n\}.$$

若 $Z\subseteq\bigcup_{U\in\Gamma}X(U)$, 则称由串组成的集合覆盖集合 $Z\subseteq X$.

对任意的实数 s 以及由串组成的集合 Γ, 定义 Γ 的自由能量为

$$F(\Gamma,s)=\sum_{U\in\Gamma}\exp(-n(U)s).$$

对给定的集合 Z, 定义

$$M(Z,\Lambda,s,n)=\inf_{\substack{\Gamma \text{ covers } Z\\ \Gamma\subseteq W_{\geqslant n}(\Lambda)}}F(\Gamma,s),$$

以及

$$M(Z,\Lambda,s)=\lim_{n\to\infty}M(Z,\Lambda,s,n).$$

则存在唯一的一个值 $\tilde{s}$, 使得 $M(Z,\Lambda,\cdot)$ 从 $+\infty$ 跳到 0, 有

$$h(Z,\Lambda):=\tilde{s}=\sup\{s: M(Z,\Lambda,s)=+\infty\}=\inf\{s: M(Z,\Lambda,s)=0\}.$$

最后, 得到极限存在, 有

$$h_{\mathrm{top}}(f,Z):=\lim_{\mathrm{diam}(\Lambda)\to 0}h(Z,\Lambda).$$

收稿日期: 2008-04-09

通信作者: 陈尔明(1951-), 男, 教授, 主要从事拓扑动力系统的研究. E-mail: erming_chen@hotmail.com.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(S0650017)

定义 1　$h_{top}(f, Z)$ 称为 f 限制在集合 Z 上的拓扑熵, 或简称为 Z 的拓扑熵.

定义 1 类似于豪斯道夫维数的定义. 实际上, 这些定义为所谓的 Cratheodory 结构[6] 的特殊例子, 因而具有类似的性质.

引理 1[6]　定义 1 的拓扑熵具有如下 3 点性质. (1) $h_{top}(f, Z_1) \leqslant h_{top}(f, Z_2)$, 对任意的 $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq X$. (2) $h_{top}(f, Z) = \sup_i h_{top}(f, Z_i)$, 其中 $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$, $Z_i \subseteq X$. (3) 如果 μ 为不变测度, 且 $\mu(Z) = 1$, 则 $h_{top}(f, Z) \geqslant h_\mu(f)$, 其中 $h_\mu(f)$ 为 f 的测度熵.

2　关于回归时间的局部熵和多重分形谱

设 $f: X \to X$ 为非空紧致度量空间 (X, d) 上的连续映射, 取 X 的一个子集 U, 对任意的 $x \in X$, 定义 x 首次回到 U 的回归时间为

$$\tau_U(x) = \inf\{k > 0: f^k(x) \in U\}.$$

定义 2[3]　定义 x 处的关于回归时间的上、下局部熵分别为

$$\overline{h}_\tau(f, x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \sup\left[\frac{1}{n}\log\tau_{B_n(x,\varepsilon)}(x)\right],$$

$$\underline{h}_\tau(f, x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \inf\left[\frac{1}{n}\log\tau_{B_n(x,\varepsilon)}(x)\right].$$

其中, $B_n(x, \varepsilon) = \{y \in X: d[f^i(x), f^i(y)] < \varepsilon, i = 0, \cdots, n-1\}$, $\varepsilon > 0$.

若 $\overline{h}_\tau(f, x) = \underline{h}_\tau(f, x)$, 则称 f 在 x 处关于回归时间的局部熵存在, 记为 $h_\tau(f, x)$. 以下引理说明了局部熵的存在性.

引理 2[3]　设 $f: X \to X$ 为非空紧致度量空间 (X, d) 上的连续映射, μ 为支撑在 X 上的遍历测度. 则对 μ a. e., $x \in X$, 有

$$\overline{h}_\tau(f, x) = \underline{h}_\tau(f, x).$$

对任意的 $\alpha \geqslant 0$, 考虑关于回归时间的局部熵的水平集: $K_\alpha = \{x \in X: h_\tau(f, x) = \alpha\}$. 文[3] 用拓扑熵去测量水平集 K_α 的大小, 从而定义了关于回归时间的局部熵的一种多重分形谱为

$$\eta(\alpha) = h_{top}(f, K_\alpha),$$

其中, $h_{top}(f, K_\alpha)$ 为 K_α 的拓扑熵.

3　集合的 (q, τ)-熵

文[3] 中定义了集合的 (q, τ)-熵. 假设 $\zeta = \{B_{n_i}(x_i, \varepsilon)\}_i$ 为一个至多可数的集合, $t \in \mathbf{R}$, 定义 ζ 的 (q, τ)-自由能量为

$$F_\tau(\zeta, q, t) = \sum_i \tau_{B_{n,i}(x_i,\varepsilon)}(x_i)^{-q}\exp(-tn_i).$$

对给定的非空的集合 $Z \subseteq X$, 以及 $q, t \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, N 为自然数, 令

$$M_\tau^c(Z, q, t, \varepsilon, N) = \inf_\zeta F_\tau(\zeta, q, t).$$

其中, 下确界取遍所有的有限或可数的集族 $\zeta = \{B_{n,i}(x_i, \varepsilon)\}_i$, 满足 $x_i \in Z$, $n_i \geqslant N$ 且 $Z \subseteq \bigcup_i B_{n_i}(x_i, \varepsilon)$. 对于空集, 定义 $M_\tau^c(\phi, q, t, \varepsilon, N) = 0$. 由于 $M_\tau^c(Z, q, t, \varepsilon, N)$ 关于 N 是非减的, 所以存在

$$M_\tau^c(Z, q, t, \varepsilon) = \lim_{N \to \infty} M_\tau^c(Z, q, t, \varepsilon, N) = \sup_{N > 1} M_\tau^c(Z, q, t, \varepsilon, N).$$

由于考虑的是中心在给定集合上的覆盖, 因而 $M_\tau^c(Z, q, t, \varepsilon)$ 不一定是关于集合 Z 单调的. 为了形成单调性, 令 $M_\tau(Z, q, t, \varepsilon) = \sup_{Z' \subseteq Z} M_\tau^c(Z', q, t, \varepsilon)$.

由以上定义, 可以得到如下结论.

引理 3[3]　对于任意的 $t \in \mathbf{R}$, 集值函数 $M_\tau(\cdot, q, t, \varepsilon)$ 具有如下的 3 点性质. (1) $M_\tau(\phi, q, t, \varepsilon) = 0$. (2) $M_\tau(Z_1, q, t, \varepsilon) \leqslant M_\tau(Z_2, q, t, \varepsilon)$, 对任意的 $Z_1 \subseteq Z_2$. (3) $M_\tau(\bigcup_i Z_i, q, t, \varepsilon) \leqslant \sum_i M_\tau(Z_i, q, t, \varepsilon)$, 对任意的 $Z_i \subseteq X$, $i = 1, 2, \cdots$.

引理 4[3]　存在一个临界值 $h_\tau(f, q, Z, \varepsilon) \in [-\infty, +\infty]$, 使得

$$M_\tau(Z,q,t,\varepsilon)=\begin{cases}\infty, & t< h_\tau(f,q,Z,\varepsilon);\\ 0, & t> h_\tau(f,q,Z,\varepsilon).\end{cases}$$

引理 5[3] 下列结论成立:(1) $h_\tau(f,q,\phi,\varepsilon)=-\infty$;(2) $h_\tau(f,q,Z_1,\varepsilon)\leqslant h_\tau(f,q,Z_2,\varepsilon)$, 对任意的 $Z_1\subseteq Z_2$;(3) $h_\tau(f,q,\bigcup_i Z_i,\varepsilon)=\sup_i h_\tau(f,q,Z_i,\varepsilon)$, 对任意的 $Z_i\subseteq X$, $i=1,2,\cdots$.

定义 3[3] 集合 Z 的 (q,τ)-熵为

$$h_\tau(f,q,Z)=\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,h_\tau(f,q,Z,\varepsilon).$$

引理 6[3] 由引理 5 和定义 3, 可以得到 $h_\tau(f,q,Z)$ 具有如下 3 点性质. (1) $h_\tau(f,q,\phi)=-\infty$. (2) $h_\tau(f,q,Z_1)\leqslant h_\tau(f,q,Z_2)$, 对任意的 $Z_1\subseteq Z_2$. (3) $h_\tau(f,q,\bigcup_i Z_i)=\sup_i h_\tau(f,q,Z_i)$, 对于任意的 $Z_i\subseteq X$, $i=1,2,\cdots$.

文[3]研究了水平集 K_α 的拓扑熵跟 (q,τ)-熵之间的关系, 得到如下结论.

定理 A[3] 对任意的 $\alpha\geqslant 0$, $q\in\mathbf{R}$, 有

$$h_{\mathrm{top}}(f,K_\alpha)=q\alpha+h_\tau(f,q,K_\alpha).$$

4 结论

首先给出 Legendre 变换[7]的定义. 令 $g:I\to\mathbf{R}$ 为定义在某一区间 I 上的函数, 定义 g 的 Legendre 变换 g^* 为区间 I^* 上的函数, $g^*(y)=\inf_{x\in I}[xy+g(x)]$, 其中 $I^*=\{y:-\infty<g^*(y)<+\infty\}$. 区间 I^* 称为 Legendre 变换 g^* 的定义域.

由于 $K_\alpha\subseteq X$, 根据 (q,τ)-熵的性质, 有

$$h_\tau(f,q,K_\alpha)\leqslant h_\tau(f,q,X),\qquad \forall q\in\mathbf{R}.$$

记 $h(q)=h_\tau(f,q,X)$. 再由定理 A 的结论, 有

$$h_{\mathrm{top}}(f,K_\alpha)\leqslant q\alpha+h(q),\qquad \forall\alpha,q.$$

故有 $\eta(\alpha):=h_{\mathrm{top}}(f,K_\alpha)\leqslant h^*(\alpha)=\inf_q[q\alpha+h(q)]$.

下面研究 $h^*(\alpha)$ 的定义域, 及其与多重分形谱的定义域之间的关系. 引入记号:

$$\underline{\alpha}=\sup_{q>0}\Big[-\frac{h(q)}{q}\Big],\qquad \overline{\alpha}=\inf_{q<0}\Big[-\frac{h(q)}{q}\Big].$$

显然, 有

$$h^*(\alpha)=\inf_q[q\alpha+h(q)]>-\infty,\qquad \forall\alpha\in(\underline{\alpha},\overline{\alpha}).$$

以下引理说明了, 区间 $[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$ 包含着多重分形谱的定义域, 即 $\forall\alpha\notin[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$, $K_\alpha=\phi$.

引理 7 下式成立, 有

$$\underline{\alpha}=\inf_{x\in X}\overline{h}_\tau(f,x)\leqslant\sup_{x\in X}\underline{h}_\tau(f,x)\leqslant\overline{\alpha},$$

因此, 对 $\alpha\notin[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$, $K_\alpha=\phi$.

证明 由引理 4 可知, 中间的不等式显然成立.

若 $\underline{\alpha}>\inf_{x\in X}\overline{h}_\tau(f,x)$, 则存在 $q_0>0$, $x\in X$ 及 $\delta>0$, 使得

$$-\frac{h(q_0)}{q_0}>\overline{h}_\tau(f,x)+\delta.$$

因此, $t_0:=-q_0(\overline{h}_\tau(f,x)+\delta)>h(q_0)$.

另外, 由

$$\overline{h}_\tau(f,x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\sup\Big[\frac{1}{n}\log\tau_{B_n(x,\varepsilon)}(x)\Big],$$

存在 $\varepsilon>0$, $n\in N$, 使得当 $n>N$ 时, 有

$$\frac{1}{n}\log\tau_{B_n(x,\varepsilon)}(x)\leqslant\overline{h}_\tau(f,x)+\delta.$$

因此, $\forall n>N$, 有

$$\tau_{B_n(x,\varepsilon)}(x)^{-q_0}\exp(-t_0 n) \geqslant \exp[-nq_0(\bar{h}_\tau(f,x)+\delta)]\cdot\exp(-t_0 n)=1,$$

注意到 $q_0>0$, 故有

$$M_\tau(\{x\},q_0,t_0,\varepsilon)=\sup_{Z\subseteq\{x\}}M_\tau^c(Z,q_0,t_0,\varepsilon)=$$
$$M_\tau^c(\{x\},q_0,t_0,\varepsilon)=\lim_{N\to\infty}M_\tau^c(\{x\},q_0,t_0,\varepsilon,N)=$$
$$\lim_{N\to\infty}\inf_{n\geqslant N}\tau_{B_n(x,\varepsilon)}(x)^{-q_0}\cdot\exp(-t_0 n)\geqslant 1.$$

因此, $h_t(f,q_0,\{x\},\varepsilon)\geqslant t_0$, $h_t(f,q_0,\{x\})\geqslant t_0>h(q_0)=h_\tau(f,q_0,X)$. 这显然与引理 6 结论(2)矛盾. 所以, $\underline{\alpha}\leqslant\inf_{x\in X}\bar{h}_\tau(f,x)$.

另一方面, 若 $\sup_{x\in X}\underline{h}_\tau(f,x)>\bar{\alpha}$, 则存在 $q_0<0$, $x\in X$ 及 $\delta>0$, 使得

$$-\frac{h(q_0)}{q_0}<\underline{h}_\tau(f,x)-\delta$$

因此, 有

$$t_0:=-q_0(\underline{h}_\tau(f,x)-\delta)>h(q_0).$$

另外, 由

$$\underline{h}_\tau(f,x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\inf[\frac{1}{n}\log\tau_{B_n(x,\varepsilon)}(x)],$$

存在 $\varepsilon>0$, $n\in N$, 使得当 $n>N$ 时, 有

$$\frac{1}{n}\log\tau_{B_n(x,\varepsilon)}(x)\geqslant\underline{h}_\tau(f,x)-\delta$$

因此, $\forall n>N$, 有

$$\tau_{B_n(x,\varepsilon)}(x)^{-q_0}\exp(-t_0 n)\geqslant\exp[-nq_0(\underline{h}_\tau(f,x)-\delta)]\cdot\exp(-t_0 n)=1,$$

注意到 $q_0<0$. 故有

$$M_\tau(\{x\},q_0,t_0,\varepsilon)=\sup_{Z\subseteq\{x\}}M_\tau^c(Z,q_0,t_0,\varepsilon)=$$
$$\lim_{N\to\infty}\inf_{n\geqslant N}\tau_{(B_n(x,\varepsilon))}(x)^{-q_0}\cdot\exp(-t_0 n)\geqslant 1.$$

故 $h_t(f,q_0,\{x\})\geqslant t_0>h(q_0)=h_\tau(f,q_0,X)$. 这显然与引理 6 结论(2)矛盾. 所以 $\sup_{x\in X}\underline{h}_\tau(f,x)\leqslant\bar{\alpha}$.

综合以上的结论, 可以得到如下定理:

定理 B　设 $f: X\to X$ 为非空紧致度量空间 (X,d) 上的连续映射, 且具有有限拓扑熵. 则存在 $\underline{\alpha}$, $\bar{\alpha}$, 使得(1) $\forall\alpha\notin[\underline{\alpha},\bar{\alpha}]$, $K_\alpha=\phi$; (2) 对于 $\alpha\in(\underline{\alpha},\bar{\alpha})$, 有

$$\eta(\alpha):=h_{\mathrm{top}}(f,K_\alpha)\leqslant h^*(\alpha)=\inf_q[q,\alpha+h(q)],$$

其中, $h(q)=h_\tau(f,q,X)$.

以下研究另一种上界估计的方法.

豪斯道夫维数的定义中, 用得直径最多为 ε 的球构成的覆盖族, 如果考虑用半径等于的球构成的覆盖, 就得到了上下容量的定义. 相同的方法可以用到 (q,τ)-熵的例子.

下面给出上、下 (q,τ)-熵容量的定义. 跟前面一样, 用 $F_\tau(\zeta,q,t)$ 表示 ζ 的 (q,τ)-自由能量. 但对任意的非空的集合 $Z\subseteq X$, 定义 $CM_\tau^c(Z,q,t,\varepsilon,n)=\inf_\zeta F_\tau(\zeta,q,t)$. 其中, 下确界取遍所有的有限或可数的集族 $\zeta=\{B_n(x_i,\varepsilon)\}_i$, 满足 $x_i\in Z$, 且 $Z\subseteq\bigcup_i B_n(x_i,\varepsilon)$. 注意到 ζ 中所有的球中 n 是相同的. 由于 $CM_\tau^c(Z,q,t,\varepsilon,n)$ 不一定是关于 n 单调的, 所以定义

$$\underline{CM}_\tau^c(Z,q,t,\varepsilon)=\underline{\lim}_{n\to\infty}CM_\tau^c(Z,q,t,\varepsilon,n),$$
$$\overline{CM}_\tau^c(Z,q,t,\varepsilon)=\overline{\lim}_{n\to\infty}CM_\tau^c(Z,q,t,\varepsilon,n).$$

另外, 为了满足单调性, 定义

$$\underline{CM}_\tau(Z,q,t,\varepsilon)=\sup_{Z'\subseteq Z}\underline{CM}_\tau^c(Z',q,t,\varepsilon),$$
$$\overline{CM}_\tau(Z,q,t,\varepsilon)=\sup_{Z'\subseteq Z}\overline{CM}_\tau^c(Z',q,t,\varepsilon).$$

则存在一个临界值 $\underline{Ch}_\tau(f,Z,q,\varepsilon)$, $\overline{Ch}_\tau(f,Z,q,\varepsilon)\in[-\infty,+\infty]$, 使得

$$\underline{CM}_\tau(Z,q,t,\varepsilon)=\begin{cases}\infty, & t<\underline{Ch}_\tau(f,Z,q,\varepsilon),\\ 0, & t>\underline{Ch}_\tau(f,Z,q,\varepsilon).\end{cases}$$

$$\overline{CM}_\tau(Z,q,t,\varepsilon)=\begin{cases}\infty, & t<\overline{Ch}_\tau(f,Z,q,\varepsilon),\\ 0, & t>\overline{Ch}_\tau(f,Z,q,\varepsilon).\end{cases}$$

最后, 定义上下熵容量为

$$\overline{Ch}_\tau(f,q,Z)=\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \overline{Ch}_\tau(f,Z,q,\varepsilon),\qquad \underline{Ch}_t(f,q,Z)=\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \underline{Ch}_t(f,Z,q,\varepsilon).$$

显然, 对任意的 $q\in R$, $Z\subseteq X$, Z 的(q,τ)-熵与(q,τ)-熵容量满足

$$h_t(f,q,Z)\leqslant\underline{Ch}_t(f,q,Z)\leqslant\overline{Ch}_\tau(f,q,Z).$$

因此, 可以用$\underline{Ch}(q):=\underline{Ch}_t(f,q,X)$, $\overline{Ch}(q):=\overline{Ch}_\tau(f,q,X)$取代定理 B 中的$h(q)=h_\tau(f,q,X)$. 从而得到以下定理.

定理 C 设$f:X\to X$ 为非空紧致度量空间(X,d)上的连续映射, 且具有有限拓扑熵. 则存在 $\underline{\alpha}$, $\overline{\alpha}$, 使得(1) $\forall\alpha\notin[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$, $K_\alpha=\phi$; (2) 对于 $\alpha\in(\underline{\alpha},\overline{\alpha})$, 有

$$\eta(\alpha):=h_{top}(f,K_\alpha)\leqslant\underline{Ch}^*(\alpha)\leqslant\overline{Ch}^*(\alpha).$$

其中, $\underline{Ch}(q):=\underline{Ch}_t(f,q,X)$, $\overline{Ch}(q):=\overline{Ch}_\tau(f,q,X)$.

参考文献:

[1] EYINK G L. Multifractals and lagrangian field theory[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 1995, 5(8): 1465-1473.

[2] BARREURA L. On a general concept of multifractality: Multifractal spectra for dimension, entropies and Lyapunov exponents: Multifractal rigidity[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 1997, 7(1): 27-38.

[3] YAN Zhen-zhen, CHEN Er-cai. Multifractal analysis of local entropies for recurrence time[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 33(5): 1584-1591.

[4] FLORIS T, EVGENY V. General multifractal analysis of local entropies[J]. Fundament Mathematics, 2000, 165: 203-237.

[5] BOWEB R. Topological entropy for noncompact sets[J]. Trans Amer Math Soc, 1973, 184: 125-36.

[6] PESIN Y. Dimension theory in dynamical system[M]. Chicago: Univ of Chicago Press, 1997.

[7] ROBERTS A W, VARBERG D E. Convex functions[M]. New York: Academic Press, 1973.

The Upper Estimate on the Multifractal Spectrum of Local Entropies for Recurrence Time

WU Zhi-hu, CHEN Er-ming

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The problem of the multifractal spectrum of local entropies for recurrence time is researched. By using the general entropies and entropy capacities, we obtain two upper estimates on the multifractal spectrum of local entropies for recurrence time, and the domain of the multifractal spectrum is also studied.

Keywords: recurrence time; local entropy; multifractal spectrum; upper boundary estimate

(责任编辑: 鲁 斌 英文审校: 张金顺, 黄心中)