

文章编号: 1000-5013( 2009) 03-0357-02

# 机器人运动计划复杂性的一些计算

陈尔明

( 华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021 )

摘要: 根据 Farber 研究的结果, 进一步讨论机器人运动计划复杂性的计算. 利用零除子卡积长度估计运动计划的拓扑复杂性  $TC(X)$  的下界, 而利用维数、 $r$ -连通性等估计  $TC(X)$  的上界, 从而对两种构型空间的运动计划给出拓扑复杂性的准确值.

关键词: 机器人运动计划; 拓扑复杂性; 上同调环; 零除子卡积长度

中图分类号: O 189.11; TP 242

文献标识码: A

## 1 预备知识

对于空间中所有路径的集合给与拓扑, 以描述机器人的运动特性, 近来已有相关的系列研究<sup>[1-4]</sup>.

定义 1<sup>[1]</sup> 设  $X$  是构型空间,  $PX$  表示所有的连续道路  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  的集合. 对  $PX$  赋予紧开拓扑, 用  $\pi: PX \rightarrow X \times X$  表示道路  $\gamma$  与其起点终点的关系的映射. 其中,  $\pi(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$  为起点、终点的点对. 再定义  $s: X \times X \rightarrow PX$ , 使得  $s^0 \pi = id$ . 如果  $s$  是连续的, 就称运动计划是连续的. 一般的情形, 运动计划是不连续的<sup>[1]</sup>. 于是, 有如下的结论.

定理 1<sup>[1]</sup> 空间  $X$  存在连续的运动计划, 当且仅当  $X$  是可缩的.

定义 2<sup>[1]</sup> 对于道路连通空间  $X$ , 定义运动计划的拓扑复杂性为  $TC(X) = k$ , 其中,  $k$  是使得下式成立的最小数: Cartesian 积  $X \times X = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k$ , 其中  $U_i$  是开集, 且对于每个  $i$  存在连续运动计划  $s_i: U_i \rightarrow PX$  使得  $s_i^0 \pi = id$ . 如果不存在这样的  $k$ , 则定义  $TC(X) = \infty$ . 运动计划的拓扑复杂性  $TC(X)$  有

定理 2<sup>[1]</sup>  $TC(X)$  是同伦不变的, 即只依赖于  $X$  的同伦型.

定理 3<sup>[2]</sup> 设  $X$  是一个道路连通的仿紧的局部可缩的拓扑空间, 则  $TC(X) \leq 2\dim X + 1$ .

设  $k$  是域  $H^*(X, k)$  是一个分次  $k$ -代数, 具有由卡积定义的乘法, 有

$$\cup: H^*(X, k) \otimes H^*(X, k) \rightarrow H^*(X, k). \quad (1)$$

其张量积也是一个分次代数, 具有乘法  $(u_1 \otimes v_1) \cdot (u_2 \otimes v_2) = (-1)^{|v_1||u_2|} u_1 u_2 \otimes v_1 v_2$ . 从而, 上面的映射构成同态. 有关的概念与计算可参见文[5-6].

定义 3<sup>[1]</sup> 在式(1)中的同态核, 称为  $H^*(X, k)$  的零除子理想. 此理想中最长的非平凡积的长度, 称为  $H^*(X, k)$  的零除子卡积长度.

定理 4<sup>[1]</sup> 复杂性  $TC(X)$  大于零除子卡积长度. 这样, 可用零除子卡积长度估计  $TC(X)$  的下界, 而用维数、 $r$ -连通性等估计  $TC(X)$  的上界.

## 2 主要结果及应用

定理 5 设  $\underbrace{T^m \vee T^m \vee \dots \vee T^m}_{n\text{个}} = X$ , 以它为构型空间的运动系统的运动计划复杂性. 当  $n > 1$  时, 为  $2m + 1$ ; 当  $n = 1$  时, 则为  $m + 1$ .

证明  $n = 1$  时,  $TC(X) = m + 1$ , 是一个已知的结果<sup>[1]</sup>. 设  $n > 1$ . 首先,  $\underbrace{T^m \vee T^m \vee \dots \vee T^m}_{n\text{个}}$  作为  $n$  个

收稿日期: 2008-04-11

作者简介: 陈尔明(1951-), 男, 教授, 主要从事拓扑学的研究. E-mail: erming\_chen@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(S0650017)

$T^m$  的一点并是多面体, 一个道路连通的仿紧的局部可缩的拓扑空间. 显然, 定理 3 的不等式成立, 即  $TC(X) \leq 2\dim X + 1$ . 另外,  $\dim X = m$ , 所以  $TC(X) \leq 2m + 1$ . 由此得到  $TC(X)$  的一个上界.

再来估计其下界. 取  $u_i \in H^m(X, Q)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . 其中,  $u_i$  是第  $i$  个投射  $X = T^m \vee T^m \vee \dots \vee T^m \rightarrow T^m$  之下  $H^m(T^m, Q)$  的基本类的回拉. 显然,  $u_i u_j = 0$  对任何  $i, j$  成立.

再设  $u_i = a_1^i a_2^i \dots a_m^i$ , 其中的  $m$  个元  $a_k^i$ ,  $k = 1, \dots, m$ , 分别是使这  $m$  个元的上积为  $H^m(T^m, Q)$  的基本元的  $H^1(T^m, Q)$  中的  $m$  个基本元的在  $m$  个投射下的回拉. 显然,  $u_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  都不等于零.

由于卡积  $\cup: H^*(X, k) \otimes H^*(X, k) \rightarrow H^*(X, k)$  是同态,  $1 \otimes a_k^i - a_k^i \otimes 1$  的像是  $1 \cdot a_k^i - a_k^i \cdot 1 = 0$ . 所以,  $1 \otimes a_k^i - a_k^i \otimes 1$  是同态核中的元. 其中,  $1$  是上同调环中的单位元. 已假设  $n > 1$ . 设  $\tilde{u}_i = 1 \otimes u_i - u_i \otimes 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . 由于  $u_i u_j = 0$  对任何  $i, j$  成立, 计算  $\tilde{u}_1 \tilde{u}_1 = \left[ \left( \prod_{k=1}^m a_k^2 \right) \otimes \left( \prod_{k=1}^m a_k^1 \right) - \left( \prod_{k=1}^m a_k^1 \right) \otimes \left( \prod_{k=1}^m a_k^2 \right) \right]$  可知, 它不等于零, 其阶不小于  $2m$ , 相应的零除卡积长度不小于  $2m$ . 由定理 4 可知, 此空间拓扑复杂性  $TC(X)$  大于零除子卡积长度,  $2m < TC(X)$ . 两个不等式结合起来, 得到  $TC(X) = 2m + 1$ . 证毕.

定理 6<sup>[2]</sup> 设  $X$  是一个  $r$ -连通的  $CW$  多面体,  $TC(X) \leq \lfloor (2\dim X + 1)/X \rfloor + 1$ . 再考虑另一情形.

定理 7 设  $X = S^m \vee S^n$ ,  $m$  与  $n$  奇偶相同, 且都大于 1, 则  $TC(X) = 3$ .

证明 设  $u, v$  分别是在射影  $p_1: S^m \vee S^n \rightarrow S^m$ ,  $p_2: S^m \vee S^n \rightarrow S^n$  之下  $H^m(S^m, Q)$  与  $H^n(S^n, Q)$  的生成元的回拉.  $1 \otimes u - u \otimes 1$  与  $1 \otimes v - v \otimes 1$  在式(1)的同态下是同态核中的元, 且  $uv = 0$ . 易知, 当  $m$  与  $n$  奇偶相同时,  $(1 \otimes u - u \otimes 1)(1 \otimes v - v \otimes 1) = (-1)^{m+n+1} u \otimes v - u \otimes v = -2u \otimes v \neq 0$ . 由定理 4 可知,  $3 \leq TC(X)$ . 另一方面, 设  $M = \min\{m, n\}$ , 则  $S^m, S^n$  都是  $M-1$  连通的. 又有  $\dim S^m = m$ ,  $\dim S^n = n$ . 由已知条件  $m$  与  $n$  都大于 1, 又有  $M-1 > 0$ . 由定理 6 可知,  $TC(X) < \lfloor (2M+1)/M \rfloor + 1 = 3 + 1/M$ , 所以,  $TC(X) \leq 3$ . 综合起来有  $TC(X) = 3$ . 证毕.

以定理 7 的结论为例, 可以考虑一个机械臂在  $R^{m+1} \vee R^{n+1}$  上运动. 在  $R^m$  上有一个运动的障碍点  $P$ ,  $R^n$  在有障碍点  $Q$ , 则机械臂在空间  $(R^m - \{P\}) \vee (R^n - \{Q\})$  上运动. 此空间同伦等价于  $X = S^m \vee S^n$ . 所以, 运动计划复杂性  $TC(X) = 3$  反映了机械臂在空间  $(R^m - \{P\}) \vee (R^n - \{Q\})$  上运动的性质.

## 参考文献:

- [1] FARBER M. Topological of motion planning[J]. Discrete Comput Geom, 2003, 29: 211-221.
- [2] FARBER M. Instabilities of robot motion[J]. Topology Appl, 2004(140): 245-266
- [3] YUZVOMSLY S. Topological complexity of generic hyperplane complements[EB/OL]. [2007-01-16]. [http://arxiv.org/PS\\_cache/math/pdf/0701/0701445v1.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0701/0701445v1.pdf).
- [4] FARBER M, YUZVOMSLY S. Topological robotics: Subspace arrangements and collision free motion planning[J]. American Mathematical Society Translations, 2004, 212: 145-156
- [5] SPANIER E. Algebraic topology[M]. New York: McGraw-Hill, 1966.
- [6] 姜伯驹. 同调论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2006.

## Some Computations about Topological Complexity of Robot Motion Planning

CHEN Er-ming

(School of Mathematics Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** In this paper, following the known results, we study the topological complexity of robot motion planning of two spaces and give exact values of the complexity on these spaces.

**Keywords:** robot motion planning; topological complexity; cohomological ring; zero divisors cup length

(责任编辑: 钱 筠 英文审校: 张金顺, 黄心中)