第30卷 第3期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 30 No. 3
2009年5月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) May. 2009

文章编号: 1000-5013(2009)03-0346-04

一类泛函微分方程周期正解的个数

韩 飞, 王全义

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究一类带有一个参数的非线性泛函微分方程 $x'(t)=a(t,x(t))x(t)-\lambda b(t)f(x(t-\tau(t)))$ 的周期正解的个数问题. 利用锥压缩锥拉伸不动点定理,解决该类方程周期正解的存在问题. 给出根据参数判断该类方程存在1个、2个,以及不存在周期正解的充分条件. 结果表明,这些充分性条件简单,容易验证.

关键词: 不动点定理; 锥; 周期正解; 泛函微分方程

中图分类号: O 175.14 文献标识码: A

关于泛函微分方程周期正解的存在性问题,已取得不少的研究成果[1-4]. 本文研究方程

$$x'(t)=a(t,x(t))x(t)-\lambda b(t)f(x(t-\tau(t))) \tag{1}$$

的周期正解的个数问题,并给出了该方程存在1个、2个,以及不存在周期正解的充分条件.

1 引理

设条件(H) $f\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$,当 $x>0$ 时,$f(x)>0$,$a\in C(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$,且对任意的 $(t,x)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+$,$a_1(t)\leqslant a(t,x)\leqslant a_2(t)$,$a(t+\omega,x)=a(t)$. 这里 a_1, a_2 是 ω 周期连续函数,$\int_0^\omega a_1(s)\mathrm{d}s>0$; $b\in C(\mathbf{R},(0,+\infty))$,$b(t+\omega)=b(t)$,$\omega>0$ 是一常数. 先给出要引用的锥压缩锥拉伸不动点定理.

引理 **1**[5] 设: X 是一Banach空间,K 是 X 中的一个锥; Ω_1 和 Ω_2 是 X 中的两个开集,且 $\theta\in\Omega_1$,$\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$,$T$: $K\cap(\overline{\Omega}_2/\Omega_1)\to K$ 是全连续算子. 若(1) $\|Tx\|\leqslant\|x\|$,$\forall x\in K\cap\partial\Omega_1$; $\|Tx\|\geqslant\|x\|$,$\forall x\in K\cap\partial\Omega_2$,或者(2) $\|Tx\|\leqslant\|x\|$,$\forall x\in K\cap\partial\Omega_2$,$\|Tx\|\geqslant\|x\|$,$\forall x\in K\cap\partial\Omega_1$ 成立,则 T 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2/\Omega_1)$ 中必有不动点.

如果 $x(t)$ 是方程(1)的 ω 周期正解,则在方程(1)两端同乘以 $\exp[-\int_0^t a(s,x(s))\mathrm{d}s]$,再从 t 到 $t+\omega$ 积分. 经整理,可得积分方程

$$x(t)=\lambda\int_t^{t+\omega}G_x(t,s)b(s)f(x(s-\tau(s)))\mathrm{d}s. \tag{2}$$

式(2)中,$G_x(t,s)=\dfrac{\exp[-\int_t^s a(\zeta,x(\zeta))\mathrm{d}\zeta]}{1-\exp[-\int_0^\omega a(\zeta,x(\zeta))\mathrm{d}\zeta]}$. 另一方面,如果正的连续的 ω 周期函数 $x(t)$ 满足积分方程(2),则从方程(2)两端对 t 求导可得方程(1). 所以,求解方程(1)的周期正解等价于求解积分方程(2)的周期正解.

取 $X=\{x\mid x\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}),x(t+\omega)=x(t)\}$,则在范数 $\|x\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}|x(t)|$ 下,X 是一Banach空间. 取 $M_1=\inf\limits_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant\omega}\exp[-\int_t^s a_2(s)\mathrm{d}s]$,$M_2=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant\omega}\exp[-\int_t^s a_1(s)\mathrm{d}s]$,$N_1=\exp[-\int_0^\omega a_2(s)\mathrm{d}s]$,$N_2=\exp[-\int_0^\omega a_1(s)\mathrm{d}s]$,$\delta=\dfrac{M_1(1-N_2)}{M_2(1-N_1)}$. 于是,由条件(H)可知,$\delta\in(0,1)$.

收稿日期: 2007-11-20

通信作者: 韩 飞(1977-),男,助教,主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究. E-mail: feihan288@163.com.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(Z0511026); 国务院侨办科研基金资助项目(07QZR09)

在 X 中取一锥 $K=\{x\in X \mid x(t)\geqslant\delta\|x\|, t\in\mathbf{R}\}$. 对于任意的 $x\in K$, $t\in\mathbf{R}$, $t\leqslant s\leqslant t+\omega$, 有

$$\frac{M_1}{1-N_1}\leqslant G_x(t,s)\leqslant\frac{M_2}{1-N_2}.$$

在 K 中定义一算子 T 为

$$(Tx)(t)=\lambda\int_t^{t+\omega}G_x(t,s)b(s)f(x(s-\tau(s)))\mathrm{d}s,\qquad x\in K.$$

易证对任意的 $x\in K$, $t\in\mathbf{R}$, $(Tx)(t+\omega)=(Tx)(t)$, 且

$$\|Tx\|\leqslant\frac{\lambda M_2}{1-N_2}\int_0^{\omega}b(s)f(x(s-\tau(s)))\mathrm{d}s,$$

$$(Tx)(t)=\lambda\int_0^{t+\omega}G_s(t,s)b(s)f(x(s-\tau(s)))\mathrm{d}s\geqslant\frac{\lambda M_1}{1-N_1}\int_0^{\omega}b(s)f(x(s-\tau(s)))\mathrm{d}s\geqslant\delta\|Tx\|,$$

所以 $T: K\to K$. 由此可知, 求解方程的 ω 周期正解等价于求解算子 T 在锥 K 中的正不动点, 易证 T 是一全连续算子(连续且将 K 中的有界闭集映成紧集).

引入记号

$$M(r)=\max_{0\leqslant t\leqslant r}f(t),\qquad m(r)=\min_{\delta r\leqslant t\leqslant r}f(t),$$

$$f^0=\lim_{u\to 0^+}\frac{f(u)}{u},\qquad f^\infty=\max_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u},$$

$$\Omega_r=\{x\in X \mid \|x\|<r\}.$$

引理 2　假设条件(H)成立, 则对于任意实数 $r>0$, 如果 $x\in K\cap\partial\Omega_r$, 则有

$$\|Tx\|\geqslant\frac{\lambda m(r)M_1\int_0^{\omega}b(s)\mathrm{d}s}{1-N_1}.$$

证明　由 $x\in K\cap\partial\Omega$ 可得对任意的 $t\in\mathbf{R}$, 有 $\delta r\leqslant x(t-\tau(t))\leqslant r$, 所以 $f(x(t-\tau(t)))\geqslant m(r)$. 对于任意的 $t\in\mathbf{R}$, 有

$$(Tx)(t)\geqslant\frac{M_1}{1-N_1}\lambda\int_0^{\omega}b(s)f(x(s-\tau(s)))\mathrm{d}s\geqslant\frac{M_1m(r)\lambda\int_0^{\omega}b(s)\mathrm{d}s}{1-N_1}.$$

引理 3　假设条件(H)成立, 则对于任意的实数 $r>0$, 如果 $x\in K\cap\partial\Omega_r$, 则有

$$\|Tx\|\leqslant\lambda\frac{M_2M(r)\int_0^{\omega}b(s)\mathrm{d}s}{1-N_2}.$$

证明　由 $x\in K\cap\partial\Omega$ 可得, 对任意的 $t\in\mathbf{R}$ 有 $\delta r\leqslant x(t-\tau(t))\leqslant r$, 所以 $f(x(t-\tau(t)))\leqslant M(r)$. 对于任意的 $t\in\mathbf{R}$, $(Tx)(t)\leqslant\frac{\lambda M_2M(r)}{1-N_2}\int_0^{\omega}b(s)\mathrm{d}s$.

引理 4　假设条件(H)成立, 并且假设对于 $x\in K$, $t\in[0,\omega]$ 有 $f(x(t))\geqslant x(t)\varepsilon$. 这里, $\varepsilon>0$ 是一个常数, 则有

$$\|Tx\|\geqslant\lambda\varepsilon\frac{M_1^2(1-N_2)}{(1-N_1)^2M_2}\int_0^{\omega}b(s)\mathrm{d}s\|x\|.$$

证明　设 $x\in K$, 则由条件可知

$$(Tx)(t)\geqslant\lambda\frac{M_1}{1-N_1}\int_0^{\omega}b(s)f(x(s-\tau(s)))\mathrm{d}s\geqslant\lambda\frac{M_1}{1-N_1}\int_0^{\omega}b(s)x(s-\tau(s))\varepsilon\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\lambda\varepsilon\frac{M_1}{1-N_1}\int_0^{\omega}b(s)\mathrm{d}s\delta\|x\|=\lambda\varepsilon\frac{M_1^2(1-N_2)}{(1-N_1)^2M_2}\int_0^{\omega}b(s)\mathrm{d}s\|x\|.$$

所以 $\|Tx\|\geqslant\lambda\varepsilon\frac{M_1^2(1-N_2)}{(1-N_1)^2M_2}\int_0^{\omega}b(s)\mathrm{d}s\|x\|$.

引理5　假设条件(H)成立, 并且假设存在 $\varepsilon>0$ 和 $r>0$, 使得对于任意的 $0<x<r$ (或 $x>r$) 都有 $f(x)\leqslant\varepsilon x$, 则对任意的 $x\in K\cap\partial\Omega_r$ (或 $x\in K\cap\partial\Omega_{r^*}^*$, $r^*=\frac{r}{\delta}$), 有 $\|Tx\|\leqslant\lambda\varepsilon\frac{M_2\int_0^{\omega}b(s)\mathrm{d}s}{1-N_2}\|x\|$.

证明　只证括号外的情况,至于括号中的情况同理可证. 对于任意的 $x\in K\cap\partial\Omega_r$,由 T 的定义,有

$$\|Tx\|\leqslant\lambda\frac{M_2}{1-N_2}\int_0^\omega b(s)\varepsilon\|x(s-\tau(s))\|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\lambda\varepsilon\frac{M_2}{1-N_2}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s\|x\|=\lambda\varepsilon\frac{M_2\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}{1-N_2}\|x\|.$$

所以,$\|Tx\|\leqslant\lambda\varepsilon\frac{M_2\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}{1-N_2}\|x\|$.

2　主要结果及证明

取 n_0 为集合 $\{f_0, f_\infty\}$ 中 0 的个数; n_∞ 为集合 $\{f_0, f_\infty\}$ 中 ∞ 的个数.

定理 1　假设条件(H)成立,则(1) 如果 $n_0=1$ 或 2,当 $\lambda>\frac{1-N_1}{m(1)M_1\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}$ 时,方程(1)有 n_0 个周期正解;(2) 如果 $n_\infty=1$ 或 2,则当 $0<\lambda<\frac{1-N_2}{M_2M(1)\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}$ 时,方程(1)有 n_∞ 个周期正解;(3) 如果 $n_0=0$ 或 $n_\infty=0$,则分别对于充分大或充分小的 $\lambda>0$,方程(1)不存在 ω 周期正解.

证明　(1) 取 $r_1=1$,则对于任意的 $x\in K\cap\partial\Omega_{r_1}$,由引理 2 可知

$$\|Tx\|\geqslant\frac{\lambda m(1)M_1\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}{1-N_1}.$$

由于 $\lambda<\frac{1-N_1}{m(1)M_1\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}$,所以 $\|Tx\|>1=\|x\|$.

如果 f_0,则可知对于任意充分小的 $\varepsilon>0$,$\varepsilon<\frac{m(1)M_1(1-N_2)}{M_2(1-N_1)}$,存在 $0<r_2<r_1$,使得当 $0<x<r_2$ 时有 $f(x)<\varepsilon x$. 对于 $x\in K\cap\partial\Omega_{r_2}$,$t\in[0,\omega]$,有 $f(x(t))\leqslant\varepsilon x(t)$. 由引理 5 及条件(1)可知,对于任意的 $x\in K\cap\partial\Omega_{r_2}$,有

$$\|Tx\|\leqslant\lambda\frac{\varepsilon M_2\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}{1-N_2}\|x\|<\|x\|.$$

由引理 1 可知,算子 T 在 $K\cap\partial(\overline{\Omega}_{r_1}/\Omega_{r_2})$ 中有不动点,它就是方程(1)的周期正解.

如果 $f_\infty=0$,则对于任意充分小的 $\varepsilon>0$,$\varepsilon<\frac{m(1)M_1(1-N_2)}{M_2(1-N_1)}$,存在 $r_3>r_1$,使得当 $x>r_3$ 时有 $f(x)<\varepsilon x$,取 $r_4>\frac{r_3}{\delta}$. 对于 $x\in K\cap\partial\Omega_{r_4}$,$t\in[0,\omega]$,有 $x(t)\geqslant\delta\|x\|>r_3$,$f(x(t))\leqslant\varepsilon x(t)$. 再根据引理 5 及条件(1)可知,对于任意的 $x\in K\cap\partial\Omega_{r_4}$,有

$$\|Tx\|\leqslant\lambda\frac{\varepsilon_1 M_2\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}{1-N_2}\|x\|<\|x\|.$$

所以,由引理 1 可知算子 T 在 $K\cap(\overline{\Omega}_4/\Omega_1)$ 中存在不动点 x,它就是方程(1)的周期正解.

如果 $f_0=f_\infty=0$,则由上面的证明可知,算子 T 分别在 $K\cap(\overline{\Omega}_1/\Omega_{r_2})$ 和 $K\cap(\overline{\Omega}_4/\Omega_{r_1})$ 中各存在一个不动点,所以方程(1)有两个周期正解.

(2) 取 $r_1=1$,则对于任意的 $x\in K\cap\partial\Omega_1$,由引理 3 可知

$$\|Tx\|\leqslant\frac{\lambda M(1)M_2\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}{1-N_2}.$$

由于 $0<\lambda<\frac{1-N_2}{M_2M(1)\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}$,故 $\|Tx\|<1=\|x\|$.

如果$f_0=\infty$,则对于任意充分大的$A>0\left(A>\frac{(1-N_1)^2}{\lambda M_1^2(1-N_2)}\right)$,存在$r_5<r_1$,使得当$0<x\leqslant r_5$时有$f(x)>Ax$. 所以对$x\in K\cap\partial\Omega_{r_5}$,$t\in[0,\omega]$,有$f(x(t))\geqslant Ax(t)$. 由引理4可知,对于$x\in K\cap\partial\Omega_{r_5}$,有

$$\|Tx\|\geqslant\lambda A\frac{M_1^2(1-N_2)}{(1-N_1)^2}\int_0^\omega b(s)\,\mathrm{d}s\,\|x\|>\|x\|.$$

从而由引理1可知,算子T在$K\cap(\overline{\Omega}_{r_1}/\Omega_{r_5})$中有不动点$x$,它就是方程(1)的周期正解.

如果$f_\infty=\infty$,则对于任意大的$B>0\left(B>\frac{(1-N_1)^2}{\lambda M_1^2\int_0^\omega b(s)\,\mathrm{d}s}\right)$存在$r_6>r_5$,使得当$x>r_6$时有$f(x)>Bx$. 取$r_7>\frac{r_6}{\delta}$,则对任意的$x\in K\cap\partial\Omega_{r_7}$有$x(t)\geqslant r_6$,所以对于$t\in[0,\omega]$,有$f(x(t))>Bx(t)$. 由引理4可得,对于$x\in K\cap\partial\Omega_{r_7}$,有

$$\|Tx\|\geqslant\lambda B\frac{M_1^2(1-N_2)}{(1-N_1)^2}\int_0^\omega b(s)\,\mathrm{d}s\,\|x\|>\|x\|.$$

由引理1可知,算子T在$K\cap(\overline{\Omega}_{r_7}/\Omega_{r_1})$中有不动点,它就是方程(1)的周期正解.

若$f_0=f_\infty=0$,由上面的证明可知,算子T分别在$K\cap(\overline{\Omega}_{r_1}/\Omega_{r_5})$和$K\cap(\overline{\Omega}_{r_7}/\Omega_{r_1})$中存在不动点$x_1,x_2$,所以方程(1)有两个周期正解.

(3) 如果$n_0=0$,则有$f_0>0$,$f_\infty>0$,所以存在正数A_1,A_2和$r_8,r_9(r_8<r_9)$,使得当$t\in[0,r_8]$时,有$f(x)\geqslant A_1x$;当$t\in[r_9,\infty)$时,有$f(x)\geqslant A_2x$. 取$A_3=\min\{A_1,A_2,\min\limits_{r_8\leqslant x\leqslant r_9}\frac{f(x)}{x}\}>0$. 因此对于$t\in[0,\infty)$,可得$f(x)\geqslant A_3x$. 假设$x_0(t)$是方程(1)的一个$\omega$周期正解,所以它是算子$T$在空间$X$中的一个不动点,即$Tx_0(t)=x_0(t)$. 对于充分大的正数$\lambda>\frac{M_2(1-N_1)^2}{A_3M_1^2(1-N_2)\int_0^\omega b(s)\,\mathrm{d}s}$,由引理4可得

$$\|x_0\|=\|Tx_0\|\geqslant\lambda A_3\frac{M_1^2(1-N_2)\int_0^\omega b(s)\,\mathrm{d}s}{M_2(1-N_1)^2}\|x_0\|>\|x_0\|.$$

这就发生了矛盾. 故方程(1)不可能存在ω周期正解.

若$n_\infty=0$,则$f_0<\infty$,$f_\infty<\infty$,存在正数B_1,B_2和$r_{10},r_{11}(r_{10}<r_{11})$,使得当$x\in[0,r_{10}]$时,$f(x)\leqslant B_1x$;当$x\in[r_{11},\infty)$时,$f(x)\leqslant B_2x$. 取$B_3=\min\{B_1,B_2,\min\limits_{r_{10}\leqslant x\leqslant r_{11}}\frac{f(x)}{x}\}>0$. 因此,对于$x\in[0,\infty)$可得$f(x)\geqslant B_3x$. 假设$x_0(t)$是方程(1)的一个$\omega$周期正解,所以它是算子$T$在空间$X$中的一个不动点,即$Tx_0(t)=x_0(t)$. 对于$0<\lambda<\frac{1-N_2}{B_3M_2\int_0^\omega b(s)\,\mathrm{d}s}$. 于是,有

$$\|x_0\|=\|Tx_0\|\leqslant\frac{\lambda B_3M_2\int_0^\omega b(s)\,\|x_0(s-\tau(s))\|\,\mathrm{d}s}{1-N_2}\leqslant$$

$$\lambda B_3\frac{M_2\int_0^\omega b(s)\,\mathrm{d}s}{1-N_2}\|x_0\|<\|x_0\|.$$

这就发生了矛盾. 故方程(1)不可能存在ω周期正解.

3　例子

考虑方程

$$x'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2(1+x^2(t))}+\sin t\right)x(t)-\lambda(x^p(t-\tau(t))+x^q(t-\tau(t))).$$

上式中,$0<p<1<q$,$\tau(t)$是2π周期为的连续函数. $a(t,x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(1+x^2)}+\sin t$,$b(t)=1$,取$a_1(t)=$

$\frac{1}{2}+\sin t$, $a_2(t)=1+\sin t$. 所以, 对于任意 $t\in[0,2\pi]$, 有

$$a_1(t)\leqslant a(t,x)\leqslant a_2(t)$$

$$M_1=\inf_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant\omega}\exp\left[-\int_t^s a_2(s)\mathrm{d}s\right]=\mathrm{e}^{-2\pi},$$

$$M_2=\sup_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant\omega}\exp\left[-\int_t^s a_1(s)\mathrm{d}s\right]=\exp\left[-\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}a_1(s)\mathrm{d}s2\pi\right]=\mathrm{e}^{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}},$$

$$N_1=\exp\left[-\int_0^\omega a_2(s)\mathrm{d}s\right]=\mathrm{e}^{-2\pi},\qquad N_2=\exp\left[-\int_0^\omega a_1(s)\mathrm{d}s\right]=\mathrm{e}^{-\pi},$$

$$\delta=\frac{M_1(1-N_2)}{M_2(1-N_1)}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}}(\mathrm{e}^{\pi}+1)},$$

$$f(x)=x^p+x^q,\qquad M(1)=\min_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=2,$$

$$f_0=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0+}(x^{p-1}+x^{q-1})=\infty,$$

$$f_\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(x^{p-1}+x^{q-1})=\infty,\qquad n_\infty=2.$$

当 $0<\lambda<\dfrac{1-N_2}{M_2M(1)\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{e}^{\pi}}{4\mathrm{e}^{\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}}}$时, 由定理的结论可知该方程存在两个周期正解.

参考文献:

[1] WANG Hai-yan. Positive periodic solutions of functional differential equations[J]. Journal of Differential Equation, 2004, 202: 354-366.

[2] KUANG Y, SMITH H L. Periodic solutions of differential delay equations related to threshold-type delays, oscillations and dynamics in delay equations[J]. Contemp Math, 1992, 129: 153-176.

[3] LI Y K. Periodic solutions of periodic delay Lotka-Volterra equation and systems [J]. J Math Anal Appl, 2001, 255: 260-280.

[4] 韩 飞, 王全义. 具状态依赖时滞微分方程的周期正解[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2005, 26(4): 357-360.

[5] 郭大均. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2003: 286-330.

Number of Positive Periodic Solutions for a Class of Functional Differential Equations

HAN Fei, WANG Quan-yi

(School of Mathematics Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we study a class of non-linear functional differential equations with one parameter. By employing the cone compression and extension fixed point theorem, we solve the existence of positive periodic solutions for this class of equations. Some sufficient conditions which determine the existence of one or two positive solutions and nonexistence of positive periodic solutions for the equation are presented. These conditions are simple and easily verifiable.

Keywords: fixed point theorem; cone; positive periodic solution; functional differential equation

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)