

文章编号: 1000-5013( 2009) 02-0237-02

# 正矩阵最大特征值界的新估计

田朝薇, 宋海洲

( 华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 利用 Frobenius 定理、相似变换及一些不等式技巧, 得到正矩阵谱半径的新上、下界. 结果表明, 新上界比 Ostrowski 定理的上界更优; 在某些条件下, 新上界优于 Brauer 定理的上界. 最后, 用实例证明结果.

关键词: 正矩阵; 特征值; 新估计; 界; 谱半径

中图分类号: O 151.21

文献标识码: A

## 1 主要结论及其证明<sup>[1-3]</sup>

为叙述方便, 引入一些记号. 设  $A = (a_{ij}) > 0$ , 表示  $n$  阶正矩阵, 其谱半径为  $\rho(A)$ . 记  $r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为  $A$  的第  $i$  行行和,  $r = \min_i r_i$ ,  $R = \max_i r_i$ ,  $r = \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{n}$ ,  $m = \min_{i,j} (a_{ij}/r_i)$ ,  $m' = \min_{i,j} a_{ij}$ .

定理 1 设  $A = (a_{ij}) > 0$ ,  $n \geq 2$ , 且  $r < R$ , 则

$$r + mn(r - r) \leq \rho(A) \leq R - mn(r - r). \quad (1)$$

证明 令  $B = \text{diag}(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \dots, \frac{1}{r_n})$ , 则有  $C = BAB^{-1} = (c_{ij})_{n \times n}$ . 其中,  $c_{ij} = \frac{r_j}{r_i} a_{ij}$ . 记  $t_{ij} = \frac{a_{ij}}{r_i}$ , 则

$\sum_{j=1}^n t_{ij} = 1$ ,  $m = \min_{i,j} t_{ij}$ ,  $m > 0$ . 矩阵  $C$  的第  $i$  行行和为  $r'_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{r_j}{r_i} a_{ij} = \sum_{j=1}^n t_{ij} r_j$ . 易得,  $r \leq r'_i \leq R$ .

因为  $R - r'_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} (R - r_j) \geq m(nR - \sum_{j=1}^n r_j) = mn(R - r)$ , 所以,  $r'_i \leq R - mn(R - r)$ .

同理可得,  $r'_i \geq r + mn(r - r)$ , 即  $r + mn(r - r) \leq \rho(A) \leq R - mn(R - r)$ . 定理证毕.

注 式(1)的上、下界是可达的. 例如, 取  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ .

推论 设  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n} > 0$ ,  $n \geq 2$ , 且  $r < R$ , 则  $r + m(R - r) \leq \rho(A) \leq R - m(R - r)$ .

证明 因为  $mn(r - r) = m[(r_1 + r_2 + \dots + r_n) - nr] \geq m[R + (n - 1)r - nr] = m(R - r)$ , 所以,  $r + mn(r - r) \geq r + m(R - r)$ .

同理可得,  $R - mn(R - r) \leq R - m(R - r)$ . 因此,  $r + m(R - r) \leq \rho(A) \leq R - m(R - r)$ . 证毕.

## 2 结果的比较及举例

定理 2 设  $A = (a_{ij}) > 0$ ,  $n \geq 2$ , 且  $r < R$ , 则定理 1 的上界优于 Ostrowski 定理的上界<sup>[2]</sup>.

证明 因为  $n \geq 2$ , 故  $m' \leq \frac{r}{2}$ , 从而有  $\frac{1}{m} \geq \frac{2}{r} > \frac{1}{r} + \frac{1}{R}$ , 即

$$Rr > (R + r)m' \Rightarrow (R - m')r^2 < R^2(r - m') \Rightarrow \frac{r}{R} < \sqrt{\frac{r - m'}{R - m'}}.$$

收稿日期: 2007-12-25

通信作者: 田朝薇(1971-), 女, 讲师, 主要从事运筹与优化的研究. E-mail: hquljc@hqu.edu.cn.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

令  $\alpha = \frac{r-m'}{\sqrt{R-m'}}$ , 则  $\frac{R-r}{R} > 1-\alpha$  成立, 即  $(R-r_1) + \dots + (R-r_n) > (1-\alpha)R$ ,  $n(1-\frac{r}{R}) > 1-\alpha$ . 注意到  $Rm \geq m'$ , 则  $n(Rm)(1-\frac{r}{R}) > m'(1-\alpha)$  成立, 即  $R-mn(R-r) < R-m'(1-\alpha)$ . 定理证毕.

**定理 3** 设  $A = (a_{ij}) > 0$ ,  $n \geq 2$ , 且  $r < R$ . 当  $m' \leq \sum_{i=2}^n (R-r_i)$  (设  $r = r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n = R$ ) 时, 定理 1 的上界优于 Brauer 定理的上界<sup>[3]</sup>.

**证明** 设  $g = [R-2m' + \sqrt{R^2-4m'(R-r)}]/2(r-m')$ , 则  $g < \frac{R-m'}{r-m'}$ , 从而  $R-m'(1-\frac{1}{g}) > R-m' + m' \frac{r-m'}{R-m'}$ . 当  $m' \leq \sum_{i=2}^n (R-r_i)$  (设  $r = r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n = R$ ) 时, 有

$$R \leq \sum_{i=1}^n (R-r_i) + (r-m'), \quad 1 \leq n(1-\frac{r}{R}) + \frac{(r-m')}{R}, \quad 1-\frac{r-m'}{R-m'} < n(1-\frac{r}{R}).$$

注意到  $Rm \geq m'$ , 有  $m' - m' \frac{r-m'}{R-m'} < mn(R-r)$ , 则  $R-m' + m' \frac{r-m'}{R-m'} > R-mn(R-r)$ , 即  $R-m'(1-\frac{1}{g}) > R-mn(R-r)$ . 定理证毕.

**例 1** 对于矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ , 其最大特征值  $\rho(A) \approx 7.531$ , 则有 (1) Ostrowski 定理的估计值:

$4.732 \leq \rho(A) \leq 9.577$  (行),  $4.5 \leq \rho(A) \leq 9.667$  (列); (2) Brauer 定理的估计值:  $5.162 \leq \rho(A) \leq 9.359$  (行),  $4.854 \leq \rho(A) \leq 9.472$  (列); (3) 定理 1 的估计值:  $5.333 \leq \rho(A) \leq 8.333$  (行),  $6 \leq \rho(A) \leq 8$  (列).

**例 2** 对于矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$ , 定理 1 的估计值:  $0.55 \leq \rho(A) \leq 0.7375$  (行),  $0.5167 \leq$

$\rho(A) \leq 0.7667$  (列); 而文[4]得  $\rho(A) \geq 0.5325$  (行), 文[5]得  $\rho(A) \geq 0.5250$  (行).

#### 参考文献:

- [1] FROBENIUS G. Über matrizen aus nichtnegativen elementen[M]. Berlin: Sitzungsber Königl Akad Wiss, 1912: 456-477.
- [2] OSTROWSKI A. Bounds for the greatest latent root of a positive matrix[J]. London Math Soc, 1952, 27: 253-256.
- [3] BRAUER A. The theorems of ledermann and ostrowski on positive matrixes [J]. Duke Math, 1957, 24: 265-274.
- [4] 秦 霁, 黄廷祝. 非负矩阵 Perron 根的下界[J]. 工程数学学报, 2007, 24(3): 559-562.
- [5] 卢琳璋, 马 飞. 非负矩阵 Perron 根的上下界[J]. 计算数学, 2003, 25(2): 58-64.

## New Estimation for the Bounds of the Greatest Characteristic Root of a Positive Matrix

TIAN Zhao-wei, SONG Hai-zhou

(School of Mathematics Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** In this paper, we obtain new bounds for the greatest eigenvalues of a positive matrix by using Frobenius theorem, similarity transformation and the skill of inequation. The new upper bound is sharper than the upper bound in Ostrowski theorem. And in certain condition, the new upper bound is better than Brauer's. Some examples are given to show that the new estimation method is effective.

**Keywords:** positive matrix; eigenvalue; bounds; new estimation; spectral radius

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)