

文章编号: 1000-5013(2009)02-0229-04

解二阶抛物型方程的一族高精度恒稳格式

张 星, 单双荣

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 对二阶抛物型方程构造了一族含参数高精度三层差分格式. 当参数满足一定的条件时, 差分格式绝对稳定, 其局部截断误差阶数最高可达 $O(\tau^2 + h^4)$. 适当地调节参数, 可以得到一个七点显式差分格式和一个两层六点隐格式. 数值例子表明, 对稳定性所作的分析是正确的.

关键词: 二阶抛物型方程; 差分格式; 绝对稳定; 截断误差

中图分类号: O 241.82

文献标识码: A

考虑如下的抛物型方程初边值问题, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 < x < L, \\ u(0, t) &= g_1(t), & u(L, t) = g_2(t), & \quad t > 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

常见的格式诸如 Laasonen, Crank-Nicholson 及 Du Fort-Frankel 等格式也都是绝对稳定的, 但截

断误差阶均较低. 前两种分别是 $O(\tau + h^2)$, $O(\tau^2 + h^2)$, 而后一种为 $O(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h})$. 当 $\frac{\tau}{h} = C$ (C 为常数) 时失去了相容性, 因而欲获得高精度的解时, 时间及空间步长将取得足够小, 这就大大增加了工作量和机器的存储单元. 文[1-3]对求解二阶抛物型方程的差分格式也进行了研究. 本文对上述问题构造了一族含参数高精度绝对稳定的三层隐式差分格式.

1 差分格式的构造

设问题(1)的解 $u(x, t)$ 充分光滑, 时间步长为 τ , 空间步长为 h , 并设 $r = \frac{\tau}{h^2}$ 为网格比, 在网点 (x_j, t_n)

处的网格函数 $u(x_j, t_n)$ 记为 u_j^n . 对方程(1)可建立差分格式为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{12} - \alpha \right) \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^{n-1}}{2\tau} + \left(\frac{17}{6} + 2\alpha - 2\beta - 4\gamma \right) \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + \\ & \left(\frac{1}{12} - \alpha \right) \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n-1}}{2\tau} + \alpha \frac{u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n-1}}{\tau} + \\ & (-2 - 2\alpha + 2\beta + 4\gamma) \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} + \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j+1}^{n-1}}{\tau} = \\ & (1 - \beta - \gamma) \frac{\delta_x^2 u_j^{n+1}}{h^2} + \beta \frac{\delta_x^2 u_j^n}{h^2} + \gamma \frac{\delta_x^2 u_j^{n-1}}{h^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)中, α, β, γ 为待定参数, 适当选取参数可以使差分格式(2)逼近微分方程(1), 具有尽可能高的离散误差, 而且有较好的稳定性. δ_x^2 表示 x 的方向的二阶中心差分算子, 即

$$\delta_x^2 u_j^n = u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n.$$

收稿日期: 2007-11-20

通信作者: 单双荣(1956-), 男, 副教授, 主要从事微分方程数值解的研究. E-mail: shansr@163.com.

基金项目: 国务院侨办科研基金资助项目(04QZR09)

2 截断误差的讨论

下面,对构造的差分格式(2)进行截断误差阶分析.当微分方程(1)的解充分光滑时,有

$$\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial t^q}=\frac{\partial^{p+2q}u}{\partial x^{p+2q}}.$$

其中, p, q 为正整数.将格式(2)中出现的各节点 u 在点 (x_j, t_n) 处 Taylor 展开,整理可得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+(1-\beta-2\gamma)\tau\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-\\ &\frac{\alpha}{2}\tau h^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{1-\beta-2\gamma}{12}\tau^3\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+\\ &\frac{1}{720}(5h^4\frac{\partial^5 u}{\partial x^4\partial t}+10h^2\tau^2\frac{\partial^5 u}{\partial x^2\partial t^3})+\frac{\tau^4}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+O(\tau^5+\tau h^4+\tau^3h^2)=\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+(1-\beta-2\gamma)\tau\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+\frac{(1-\gamma)\tau^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}+\\ &\frac{1-\beta-2\gamma}{12}\tau h^2\frac{\partial^5 u}{\partial x^4\partial t}+\frac{1-\beta-2\gamma}{6}\tau^2\frac{\partial^5 u}{\partial x^2\partial t^3}+\frac{h^4}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\\ &\frac{1-\beta}{24}h^2\tau^2\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial t^2}+\frac{1-\beta-2\gamma}{24}\tau^4\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial t^4}+O(\tau^5+\tau h^4+\tau^3h^2). \end{aligned}$$

经化简后,可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+O(\tau+\tau h^2).$$

由于 $\tau=O(h^2)$,可知差分格式(2)逼近微分方程(1)的离散误差达到 $O(\tau^2+h^4)$.适当的调节格式(2)中的参数,便可得到不同的差分格式.

(1) 当 $\alpha=\frac{1}{12}, \beta=1, \gamma=0$ 时,得到七点显式差分格式为

$$u_j^{n+1}=(2r-\frac{1}{6})(u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n)+\frac{1}{6}(u_{j-1}^{n-1}+4u_j^{n-1}+u_{j+1}^{n-1}), \tag{3}$$

其截断误差仍为 $O(\tau^2+h^4)$.

(2) 当 $\alpha=\frac{1}{12}, \beta=\gamma=\frac{1}{2}$ 时,得到两层六点隐格式为

$$\frac{1}{12}\frac{u_{j-1}^n-u_{j+1}^{n-1}}{\tau}+\frac{5}{6}\frac{u_j^n-u_j^{n-1}}{\tau}+\frac{1}{12}\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^{n-1}}{\tau}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_j^n}{h^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_j^{n-1}}{h^2}, \tag{4}$$

其截断误差仍为 $O(\tau^2+h^4)$.其中,式(4)的格式为文[1]中的特例1.

3 差分格式的稳定性

为了证明格式的稳定性,需要引用下面引理1.

引理1 即 Miller 准则^[4].实系数二次方程 $Ax^2+Bx+C=0(A>0)$,其两个根按模小于等于1的充要条件是 $A-C\geqslant 0, A+B+C\geqslant 0, A-B+C\geqslant 0$.

定理1 差分格式(2)绝对稳定的一个充分条件为

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\geqslant \frac{1}{12}, \\ \beta &\leqslant \frac{1}{2}, \\ 1-\beta-\gamma &\geqslant 0, \\ 1-\beta-2\gamma &> 0. \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

证明 令 $u_j^n=\rho^i e^{j\theta}$ ($i=\sqrt{-1}$),由 Fourier 分析法^[5]可知,格式(2)的特征方程为

$$A\rho^2+B\rho+C=0, \tag{6}$$

其中

$$\begin{cases} A = (3 - 2\beta - 4\gamma) - 4s^2[\frac{1}{12} - \alpha - 2r(1 - \beta - \gamma)], \\ B = 4s^2(2r\beta - 2\alpha) - (4 - 4\beta - 8\gamma), \\ C = 4s^2(\frac{1}{12} + \alpha + 2r\gamma) - (-1 + 2\beta + 4\gamma). \end{cases}$$

验证特征方程(6)是否满足引理, 首先有

$$A + B + C = 8rs^2 \geq 0.$$

当定理 1 的条件(5) 满足时, 有

$$\begin{cases} A = (3 - 2\beta - 4\gamma) - 4s^2[\frac{1}{12} - \alpha - 2r(1 - \beta - \gamma)] = \\ 1 + 2(1 - \beta - 2\gamma) - 4s^2[\frac{1}{12} - \alpha - 2r(1 - \beta - \gamma)] > 0, \\ A - C = 2 - \frac{2}{3}s^2 + 8rs^2(1 - \beta - 2\gamma) \geq \frac{4}{3} > 0, \\ A - B + C = 8(1 - \beta - 2\gamma) + 16\alpha s^2 + 8rs^2(1 - 2\beta) \geq 0. \end{cases}$$

这里, $s = \sin \frac{\theta}{2}$. 由引理 1 可知, 特征方程(6)的特征根的模小于等于 1. 又因为 $A - C > 0$, 故特征方程(6)无重根. 即对于任意的 $r > 0$ 时, 格式(2)绝对稳定. 定理 1 得证.

定理 2 显式差分格式(3)稳定的一个充分条件为

$$0 < r \leq \frac{1}{6}. \quad (7)$$

证明 令 $u_j^n = \rho^a e^{i\theta} (i = \sqrt{-1})$, 由 Fourier 分析法^[4]可知, 格式(5)的特征方程为

$$A\rho^2 + B\rho + C = 0. \quad (8)$$

当 $\alpha = \frac{1}{12}$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, 且定理 2 的条件(7)满足时, 有

$$\begin{cases} A = 1 - 2\gamma = 1 > 0, \\ A + B + C = 8rs^2 > 0, \\ A - C = 2 - \frac{2}{3}s^2 \geq \frac{4}{3} > 0, \\ A - B + C = (\frac{4}{3} - 8r)s^2 \geq 0. \end{cases}$$

这里, $s = \sin \frac{\theta}{2}$. 由引理 1 知, 特征方程(8)的特征根的模小于等于 1. 又因为 $A - C > 0$, 因此特征方程

(8)无重根, 即对于 $0 < r \leq \frac{1}{6}$ 时, 格式(3)绝对稳定. 定理 2 得证.

4 数值例子

仍以文[3]中的初边值问题为例, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, & t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin x, & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) &= 0, & u(\pi, t) &= 0, & t > 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其精确解为

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x.$$

对格式(2)中的参数 α, β, γ , 可以取两组数值进行计算并与真值比较. 为简便计算, 可以用本例的精确解计算第 1 层的值. 当 $t = 1$ 时, 真值与差分解的精度比较结果, 如表 1 所示. 表 1 中, $r = \frac{\tau}{h^2}$.

表 1 真值与差分解的精度比较
Tab. 1 The numerical results of the scheme (2)

格式	(α, β, γ)	(x, t)		$(2\pi/10, 1.0)$	$(4\pi/10, 1.0)$	$(5\pi/10, 1.0)$	$(7\pi/10, 1.0)$
		精确解		0.216 23	0.349 87	0.367 87	0.297 62
格式 (2) 两组 数据	$\alpha = \frac{1}{12}$	$h = \pi/10,$ $\tau = 0.1$	差分解	0.215 95	0.349 42	0.367 40	0.297 23
			绝对误差	2.77×10^{-4}	4.48×10^{-4}	4.71×10^{-4}	3.81×10^{-4}
	$\beta = \frac{1}{2}$	$h = \pi/20,$ $\tau = 0.05$	差分解	0.216 17	0.349 78	0.367 78	0.297 54
			绝对误差	5.76×10^{-5}	9.33×10^{-5}	9.812×10^{-5}	7.93×10^{-5}
	$\gamma = \frac{1}{4}$	$h = \pi/30,$ $\tau = 0.025$	差分解	0.216 22	0.349 85	0.367 85	0.297 60
			绝对误差	1.38×10^{-5}	2.24×10^{-5}	2.36×10^{-5}	1.91×10^{-5}
	$\alpha = \frac{1}{6}$	$h = \pi/10,$ $\tau = 0.1$	差分解	0.215 60	0.348 85	0.366 81	0.296 75
			绝对误差	6.27×10^{-4}	0.001 0	0.001 0	8.63×10^{-4}
	$\beta = \frac{1}{4}$	$h = \pi/20,$ $\tau = 0.05$	差分解	0.216 09	0.349 65	0.367 64	0.297 43
			绝对误差	1.35×10^{-4}	2.19×10^{-4}	2.308×10^{-4}	1.86×10^{-4}
	$\gamma = \frac{3}{8}$	$h = \pi/30,$ $\tau = 0.025$	差分解	0.216 20	0.349 82	0.367 82	0.297 57
			绝对误差	3.31×10^{-5}	5.36×10^{-5}	5.64×10^{-5}	4.56×10^{-5}
格式 (3)	$\alpha = 1/12$ $\beta = 1 \quad \gamma = 0$	$h = \pi/10,$ $\tau = 0.01$	差分解	0.216 23	0.349 87	0.367 88	0.297 62
			绝对误差	-3.53×10^{-6}	-5.71×10^{-6}	-6.00×10^{-6}	-4.85×10^{-6}

由表 1 可以看出, 定理的绝对稳定性条件是成立的. 当取不同的参数时, 对格式的稳定性的影响是不同的.

参考文献:

[1] 陈传淡, 林 群. 一族绝对稳定的差分格式[J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 1983, 22(3): 275-279.
[2] 周顺兴. 解抛物型偏微分方程的高精度差分格式[J]. 计算数学, 1982, 4(2): 204-213.
[3] 金承日. 解抛物型方程的高精度显式格式[J]. 计算数学, 1991, 13(1): 38-44.
[4] MILLER J J H. On the location of zeros of certain classes of polynomials with application to numerical analysis[J]. J Inst Math Appls, 1971, 8: 394-406.
[5] RICHTMYER R D, MORTON K W. Difference method for initial value problems[M]. 2th ed. New York: Wiley, 1967: 59-91.

A Group of Steady Difference Schemes with High Accuracy for Solving Two-Order Parabolic Equation

ZHANG Xing, SHAN Shuang-rong

(School of Mathematics Science, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: A family of high accurate and three layer difference schemes containing parameters are constructed for solving two order parabolic equation. These difference schemes are stable when the parameters satisfy a certain condition. The local truncation error can reach the order of $O(\tau^2 + h^4)$. The analysis of stability is consistent as illustrated by numerical example.

Keywords: two order parabolic equation; difference scheme; absolutely stable; truncation error

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)