第30卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 30 No. 2
2009年3月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Mar. 2009

文章编号: 1000-5013(2009)02-0225-04

有关迭代函数系统遍历性质的推广

周 艳, 陈尔明

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究无穷迭代函数系统的遍历性质. 利用 Banach 极限原理、Riesz 表现定理及数学归纳法, 对紧度量空间上无穷迭代函数系统的遍历定理进行推广, 得到了无穷迭代函数系统推广的遍历定理.

关键词: 无穷迭代函数系统; 自相似测度; 遍历定理; 伴随算子

中图分类号: O 177.99 文献标识码: A

迭代函数系统(IFS)理论是动力系统理论的继续和发展, 动力系统是研究一个映射的迭代, 而 IFS 理论是研究多个映射的迭代. Hutchinson 最早用空间 $\mathbf{R}^n$ 上的有限个相似压缩映射组, 研究分形集的自相似性. Barnsloy 把有限个压缩映射的组称为迭代函数系统(IFS), 将 IFS 的理论系统化并应用到分形研究上, 如分形图像的压缩和分形插值等. IFS 理论不仅是分形理论研究和应用的重要工具之一, 而且也广泛地应用在复动力系统的研究中, 尤其是无穷个映射组成的迭代函数系统即无穷迭代函数系统, 对复动力系统理论的研究有很大的意义. 马东魁等[1-2]研究了有穷迭代函数系统的遍历定理——Elton 定理及其推广; 吴亨哲等[3]研究了无穷迭代函数系统及其遍历定理. 本文主要研究无穷迭代函数系统的遍历性质及推广.

1 基本定义

令 $\omega:\Lambda\times X\to X,\omega(\lambda,x)=\omega_\lambda(x)$. 其中, Λ 和 X 是紧的度量空间, Λ 是参数空间, X 是主要的状态空间, $\omega_\lambda(\forall\lambda\in\Lambda)$是 X 上无穷个均匀压缩映射, p 是 Λ 上正的 Borel 概率测度, 称(X,ω,p)是一个无穷迭代函数系统.

定义 1[4] $\widetilde{T}:M(X)\to M(X),\widetilde{T}(\mu)(B)=\int_\Lambda\mu(\omega_\lambda^{-1}(B))\mathrm{d}P(\lambda)$, 其中 $M(X)$是 X 上的所有 Borel 概率测度的全体, B 是 X 上的 Borel 子集.

定义 2 $U:C(X)\to C(X),Uf(x)=\int_\Lambda f(\omega_\lambda(x))\mathrm{d}P(\lambda)$, 其中 U 为 $\widetilde{T}$ 的伴随算子, $C(X)$为 X 上所有连续函数的全体.

当 $\widetilde{T}(\mu)=\mu$ 时, 称 μ 为自相似测度. 由文[5]可知, 当 $\omega_\lambda(\forall\lambda\in\Lambda)$是均匀压缩映射时, 存在唯一的自相似测度 μ, 使 $\widetilde{T}(\mu)=\mu$ 成立.

令 $\Sigma=\prod_1^\infty\Lambda$, 即

$$\Sigma=\{(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots)\mid\lambda_n\in\Lambda\},$$

λ_n 按照概率 $p(\lambda_n)$被选择, 令

$$\pi^n:\Sigma\to\Sigma^n,$$

$$\pi^n(\sigma)=(\sigma_n,\sigma_{n-1},\cdots,\sigma_1).$$

其中, $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n,\cdots)$. 用 σ^n 来表示 $\pi^n(\sigma)$, ω_{σ^n} 来表示 $\omega_{\sigma_n}\circ\omega_{\sigma_{n-1}}\circ\cdots\circ\omega_{\sigma_1}$.

收稿日期: 2007-12-04

通信作者: 周 艳(1980-), 女, 讲师, 主要从事拓扑动力系统的研究. E-mail: zhouyan4233@gmail.com.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(S0650017)

2　主要结论和证明

引理1[3]　令(X,ω,p)是无穷迭代函数系统，ω是均匀压缩的，μ是(X,ω,p)的自相似测度，则对于$\forall f\in C(X)$，$\forall x_i\in X_i$，关于p对几乎所有的$\sigma\in\Sigma$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(\omega_{\sigma_j}\circ\omega_{\sigma_{j-1}}\circ\cdots\circ\omega_{\sigma_1}(x))=\int_X f\mathrm{d}\mu.$$

定理1　设$(X_i,\omega^{(i)},p_i)(i=1,2,\cdots,m)$是$m$个无穷迭代函数系统，其中$X_i(i=1,2,\cdots,m)$是$m$个紧致度量空间，$\omega^{(i)}(i=1,2,\cdots,m)$是$m$个均匀压缩映射，$p_i(i=1,2,\cdots,m)$为$\Lambda$上$m$个正的Borel概率测度．令$\mu_i(i=1,2,\cdots,m)$分别为其自相似测度，则对$\forall f_i\in C(X_i)$，$\forall x_i\in X_i(i=1,2,\cdots,m)$，关于$\prod_1^m p_i$对几乎所有的$(\sigma^1,\sigma^2,\cdots,\sigma^m)\in\prod_1^m\Sigma$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}f_i(\omega_{\sigma_j^{(i)}}^{(i)}\circ\omega_{\sigma_{j-1}^{(i)}}^{(i)}\circ\cdots\circ\omega_{\sigma_1^{(i)}}^{(i)}(x))=\prod_{i=1}^{m}\int_{X_i}f_i\mathrm{d}\mu_i.\tag{1}$$

证明　为了简单，记$\omega_{\sigma_j^{(i)}}^{(i)}\circ\omega_{\sigma_{j-1}^{(i)}}^{(i)}\circ\cdots\circ\omega_{\sigma_1^{(i)}}^{(i)}=\omega_{\sigma^{(i)}j}^{(i)}(i=1,2,\cdots,m)$.

首先，由引理1可知，当$m=1$时式(1)成立．下证$m=2$的情况，即证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f_1(\omega_{\sigma^{(1)}j}^{(1)}(x_1))f_2(\omega_{\sigma^{(2)}j}^{(2)}(x_2))=\int_{X_1}f_1\mathrm{d}\mu_1\int_{X_2}f_2\mathrm{d}\mu_2\tag{2}$$

成立．设$S:\Sigma\to\Sigma$，$S(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n,\cdots)=(\sigma_2,\sigma_3,\cdots,\sigma_{n+1},\cdots)$，为符号空间推移变换，又$L[\{a_n\}]$为$l^\infty$空间上的Banach极限，$\{\omega_\lambda^{(i)}|\lambda\in\Lambda\}(i=1,2,\cdots,m)$为均匀压缩映射，且$X_1,X_2$为紧的度量空间，则对已取定的$f_1\in C(X_1)$，$f_2\in C(X_2)$，$x_1\in X_1$，$x_2\in X_2$有

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f_1(\omega_{\sigma^{(1)}j}^{(1)}(x_1))f_2(\omega_{\sigma^{(2)}j}^{(2)}(x_2))-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f_1(\omega_{S\sigma^{(1)}j}^{(1)}(x_1))f_2(\omega_{S\sigma^{(2)}j}^{(2)}(x_2))\right|\to 0,\qquad n\to\infty,$$

则有

$$L\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f_1(\omega_{\sigma^{(1)}j}^{(1)}(x_1))f_2(\omega_{\sigma^{(2)}j}^{(2)}(x_2))\right]=L\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f_1(\omega_{S\sigma^{(1)}j}^{(1)}(x_1))f_2(\omega_{S\sigma^{(2)}j}^{(2)}(x_2))\right].$$

因为推移变换S在Σ上是遍历的，所以关于$p_1\times p_2$对几乎所有的$\sigma^{(1)}\in\Sigma$，$\sigma^{(2)}\in\Sigma$，有

$$L\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f_1(\omega_{\sigma^{(1)}j}^{(1)}(x_1))f_2(\omega_{\sigma^{(2)}j}^{(2)}(x_2))\right]=\text{常数}.$$

对于上述的给定的$x_1\in X_1$，$x_2\in X_2$，$f_1\in C(X_1)$，$f_2\in C(X_2)$，

(1) 首先假定$f_1\geqslant 0$，若$\int_{X_1}f_1\mathrm{d}\mu_1\neq 0$，则定义算子

$$J:f_2\to L\left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f_1(\omega_{\sigma^{(1)}j}^{(1)}(x_1))f_2(\omega_{\sigma^{(2)}j}^{(2)}(x_2))}{\int_{X_1}f_1\mathrm{d}\mu_1}\right]$$

是$C(X_2)$上的一个有界线性范函，且对任意的$f_2\geqslant 0$有$J(f_2)\geqslant 0$. 又由引理1可知$J(1)=1$. 则由Riesz表现定理，存在X_2上唯一的Borel测度μ_L，使$J(f_2)=\int_{X_2}f_2\mathrm{d}\mu_L$，即

$$L\left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f_1(\omega_{\sigma^{(1)}j}^{(1)}(x_1))f_2(\omega_{\sigma^{(2)}j}^{(2)}(x_2))}{\int_{X_1}f_1\mathrm{d}\mu_1}\right]=\int_{X_2}f_2\mathrm{d}\mu_L.\tag{3}$$

下证$\mu_L=\mu_2$，即证μ_L是自相似测度. 由式(3)有

$$L\left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f_1(\omega_{\sigma^{(1)}j}^{(1)}(x_1))f_2(\omega_\lambda^{(2)}\circ\omega_{\sigma^{(2)}j}^{(2)}(x_2))}{\int_{X_1}f_1\mathrm{d}\mu_1}\right]=\int_{X_2}f_2(\omega_\lambda^{(2)}(y))\mathrm{d}\mu_L(y)$$

$$\int_\Lambda\int_{X_2}f_2(\omega_\lambda^{(2)}(y))\mathrm{d}\mu_L(y)\mathrm{d}p_2(\lambda)=$$

$$\int_\Lambda L\left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_1(\omega^{(1)}_{\sigma^{(1)}|j}(x_1))f_2(\omega^{(2)}_\lambda\circ\omega^{(2)}_{\sigma^{(2)}|j}(x_2))}{\int_{X_1} f_1\mathrm{d}\mu_1}\right]\mathrm{d}p_2(\lambda)=$$

$$\int_\Lambda\int_\Sigma L\left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_1(\omega^{(1)}_{\sigma^{(1)}|j}(x_1))f_2(\omega^{(2)}_\lambda\circ\omega^{(2)}_{\sigma^{(2)}|j}(x_2))}{\int_{X_1} f_1\mathrm{d}\mu_1}\right]\mathrm{d}P(\sigma)\mathrm{d}p(\lambda)=$$

$$\int_\Sigma L\left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n+1} f_1(\omega^{(1)}_{\sigma^{(1)}|j}(x_1))f_2(\omega^{(2)}_{\sigma^{(2)}|j}(x_2))}{\int_{X_1} f_1\mathrm{d}\mu_1}\right]\mathrm{d}P(\sigma)=$$

$$\int_\Sigma L\left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_1(\omega^{(1)}_{\sigma^{(1)}|j}(x_1))f_2(\omega^{(2)}_{\sigma^{(2)}|j}(x_2))}{\int_{X_1} f_1\mathrm{d}\mu_1}\right]\mathrm{d}P(\sigma)=$$

$$L\left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_1(\omega^{(1)}_{\sigma^{(1)}|j}(x_1))f_2(\omega^{(2)}_{\sigma^{(2)}|j}(x_2))}{\int_{X_1} f_1\mathrm{d}\mu_1}\right]=\int_{X_2} f_2(y)\mathrm{d}\mu_L(y).$$

又因为

$$\int_{X_2} f_2(y)\mathrm{d}\widetilde{T}(\mu_2)(y)=\int_\Lambda\int_{X_2} f_2(\omega^{(2)}_\lambda(y))\mathrm{d}\mu_2(y)\mathrm{d}p_2(\lambda),$$

即有

$$\int_{X_2} f_2(y)\mathrm{d}\widetilde{T}(\mu_2)(y)=\int_{X_2} f_2(y)\mathrm{d}\mu_L(y),$$

则有 $\mu_L=\mu_2$. 所以,可证存在唯一的自相似测度 μ_2,使得

$$L\left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_1(\omega^{(1)}_{\sigma^{(1)}|j}(x_1))f_2(\omega^{(2)}_{\sigma^{(2)}|j}(x_2))}{\int_{X_1} f_1\mathrm{d}\mu_1}\right]=\int_{X_2} f_2\mathrm{d}\mu_2,$$

即

$$L\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_1(\omega^{(1)}_{\sigma^{(1)}|j}(x_1))f_2(\omega^{(2)}_{\sigma^{(2)}|j}(x_2))\right]=\int_{X_1} f_1\mathrm{d}\mu_1\int_{X_2} f_2\mathrm{d}\mu_2.$$

若 $\int_{X_1} f_1\mathrm{d}\mu_1=0$ 时,可设 $f_1^m=\frac{1}{m}+f_1$, $f_1^m\to f_1$. 则 $\int_{X_1} f_1^m\mathrm{d}\mu_1\to\int_{X_1} f_1\mathrm{d}\mu_1$ 对于所有的 f_1^m,式(2)都成立,而对于 f_1 来说,式(2)也成立.

当 $f_1\leqslant 0$ 时,类似可证式(2)成立.

(2) 当 f_1 取实值,可设 $f_1=f_{1P}-f_{1N}$,其中 $f_{1P}=\max\{f_1(x),0\}\geqslant 0$, $f_{1N}=\max\{-f_1(x),0\}\geqslant 0$,

$$L\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_1(\omega^{(1)}_{\sigma^{(1)}|j}(x_1))f_2(\omega^{(2)}_{\sigma^{(2)}|j}(x_2))\right]=$$

$$L\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{1P}(\omega^{(1)}_{\sigma^{(1)}|j}(x_1))f_2(\omega^{(2)}_{\sigma^{(2)}|j}(x_2))\right]-L\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{1N}(\omega^{(1)}_{\sigma^{(1)}|j}(x_1))f_2(\omega^{(2)}_{\sigma^{(2)}|j}(x_2))\right]=$$

$$\int_{X_1} f_{1P}\mathrm{d}\mu_1\int_{X_2} f_2\mathrm{d}\mu_2-\int_{X_1} f_{1N}\mathrm{d}\mu_1\int_{X_2} f_2\mathrm{d}\mu_2=\int_{X_1} f_1\mathrm{d}\mu_1\int_{X_2} f_2\mathrm{d}\mu_2$$

(3) 当 f_1 为复值,可设 $f_1=u+\mathrm{i}v$,其中 u,v 均为实值连续函数,

$$L\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_1(\omega^{(1)}_{\sigma^{(1)}|j}(x_1))f_2(\omega^{(2)}_{\sigma^{(2)}|j}(x_2))\right]=$$

$$L\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u(\omega^{(1)}_{\sigma^{(1)}|j}(x_1))f_2(\omega^{(2)}_{\sigma^{(2)}|j}(x_2))\right]+L\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{i}v(\omega^{(1)}_{\sigma^{(1)}|j}(x_1))f_2(\omega^{(2)}_{\sigma^{(2)}|j}(x_2))\right]=$$

$$\int_{X_1} u\mathrm{d}\mu_1\int_{X_2} f_2\mathrm{d}\mu_2+\int_{X_1}\mathrm{i}v\mathrm{d}\mu_1\int_{X_2} f_2\mathrm{d}\mu_2=\int_{X_1} f_1\mathrm{d}\mu_1\int_{X_2} f_2\mathrm{d}\mu_2.$$

综上所述,对于任何的 $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$, $f_1\in C(X_1)$, $f_2\in C(X_2)$,关于 $p_1\times p_2$ 对几乎所有的 $\sigma^{(1)}\in$

$\Sigma, \sigma^{(2)} \in \Sigma$，都有式(3)成立. 依次类推，可以证 $m=3$ 时，式(1)也成立；由此继续往下证，便可证明得式(1)总成立.

引理 2 [4] 若 $M: M_{\mathrm{fin}}(X) \to M_{\mathrm{fin}}(X)$ 为 Feller 算子，U 为其对偶算子，且存在唯一 $\mu \in M_1(X)$，使得 $M(\mu)=\mu$，则有

$$\lim_{n\to\infty} U^n f(x) \to \int_X f \mathrm{d}\mu, \qquad \forall f \in C(X), \quad \forall x \in X.$$

定理 2 令(X,ω,p)是无穷迭代函数系统，ω 是均匀压缩的，μ 是(X,ω,p)的自相似测度，则有

$$\lim_{n\to\infty} U^n f(x) \to \int_X f \mathrm{d}\mu, \qquad \forall f \in C(X), \quad \forall x \in X.$$

证明 因为 $\widetilde{T}(\mu)(B)=\int_\Lambda \mu(\omega_\lambda^{-1}(B))\mathrm{d}P(\lambda)$，以及 Riesz 表现定理，$\widetilde{T}(\mu)$可以看作 $C(X)$上的线性范函，则有

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\widetilde{T}(\mu)(x) = \int_\Lambda \int_X f(\omega_\lambda(x))\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}p(\lambda).$$

又由 $\widetilde{T}$ 的伴随算子 U 的定义 $Uf(x)=\int_\Lambda f(\omega_\lambda(x))\mathrm{d}P(\lambda)$，可知

$$\int_X Uf(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \int_\Lambda f(\omega_\lambda(x))\mathrm{d}p(\lambda)\mathrm{d}\mu(x) = \int_\Lambda \int_X f(\omega_\lambda(x))\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}p(\lambda),$$

则有

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\widetilde{T}(\mu)(x) = \int_X Uf(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

$\widetilde{T}$ 为一 Feller 算子，U 为其对偶算子，且在无穷迭代函数系统(X,ω,p)中，ω_λ($\forall \lambda \in \Lambda$)是均匀压缩映射，存在唯一的 μ 使 $\widetilde{T}(\mu)=\mu$. 由引理 2 则有

$$\lim_{n\to\infty} U^n f(x) \to \int_X f \mathrm{d}\mu, \qquad \forall f \in C(X), \quad \forall x \in X.$$

参考文献:

[1] 马东魁, 周作领. 迭代函数系统的遍历性质——Elton 定理的改进[J]. 应用数学, 2001, 14(4): 46-50.

[2] 马东魁, 徐志庭. 关于 Feller 算子的对偶算子的一个遍历定理[J]. 工程数学学报, 2006, 23(1): 183-186.

[3] 吴亨哲, 卢英花, 吉元君. 无穷迭代函数系统的遍历定理[J]. 应用数学和力学, 2005, 26(4): 426-429.

[4] WALTERS P. An introduction to ergodic theory[M]. New York: Spring-Verlag, 1982.

[5] CONWAY J. A course in functional analysis[M]. New York: Spring-Verlag, 1990.

Some Generalizations of Ergodic Property for IFS

ZHOU Yan, CHEN Er-ming

(School of Mathematics Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The ergodic property for infinite iterated function system (IFS) is considered. By employing the Banach limit theory, Riesz representation theorem and the method of mathematical induction, we extend the ergodic theorem to an extended ergodic theorem for the infinite IFS on compact metric space.

Keywords: infinite iterated function systems; invariant measure; ergodic theorem; feller operator

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)