

文章编号: 1000-5013(2009)02-0200-04

# 用三角形单元建立拓扑优化类桁架连续体

闫凯, 周克民

(华侨大学 土木工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 为克服用矩形单元划分不规则区域的困难, 使得结点和单元的分布可控性好, 采用三角形常应变单元建立拓扑优化的类桁架连续体. 以杆件在结点位置的方向和密度作为设计变量, 采用优化准则法进行优化. 在迭代过程中, 将杆件的方向调整到主应力方向, 根据主应力方向的应变调整杆件的密度. 通过对单元进行局部加密, 能够明显改善杆件汇交点处的拓扑优化结果. 算例表明, 方法是合理的、有效的.

关键词: 拓扑优化; 类桁架; 应力约束; 三角形单元

中图分类号: TU 323.01

文献标识码: A

拓扑优化是在结构的初始拓扑形式未知的情况下, 探寻材料的合理分布, 其优化过程一般都是采用编程方法建立数学计算模型. 利用计算机进行模拟分析, 克服了传统的优化设计中依靠经验进行判断的不准确性. 1904年, Michell<sup>[1]</sup>提出的 Michell 桁架理论, 也称为最小重量桁架. 20世纪60年代中期, Dorn等提出了“基结构”方法, 其后, 许多学者对 Michell 桁架理论做了进一步的研究和发展<sup>[2-6]</sup>. 1988年, Bendsoe等<sup>[7]</sup>提出基于均匀化方法的拓扑优化模型. 程耿东<sup>[8]</sup>研究了结构拓扑优化中的奇异最优解. 隋允康等<sup>[9-10]</sup>研究拓扑优化中的 ICM 方法. 周克民等<sup>[11-12]</sup>提出基于类桁架连续体的结构拓扑优化方法, 并采用有限元法进行分析. 本文采用纤维增强正交各向异性复合材料模型, 对连续体结构进行有限元法分析, 得到有限元各结点位置的应力和变形值, 通过插值计算单元内的数值. 采用三角形常应变单元, 杆件的密度和方向在单元内部连续变化, 可以很容易地得到单元刚度矩阵的解析表达式.

## 1 建立力学模型

### 1.1 二阶复合材料模型

考虑单工况应力约束平面问题, 一般把单工况应力或柔度约束下拓扑优化结构称为 Michell 桁架结构. 用  $\sigma_i, \varepsilon (i=1, 2)$  表示纤维的应力和应变,  $t_i (i=1, 2)$  代表纤维密度. 在 Michell 桁架结构中, 任一点的杆件方向一般是正交的, 所以假设纤维的两个方向正交.

设材料微元面  $dA_i$  上的力为  $\sigma_i dA_i$ , 其上纤维的横截面面积为  $t_i dA_i$ , 所承受的力为  $\sigma_i t_i dA_i$ . 那么,  $dA_i$  上的平均应力为  $\sigma_i = t_i \sigma_i (i=1, 2)$ ,  $\tau_{1,2} = 0$ . 假设, 纤维材料的弹性模量为  $E$ , 则  $\sigma_i = E \varepsilon (i=1, 2)$ . 因此, 可得  $\sigma = E t_i \varepsilon (i=1, 2)$ .

在 Michell 桁架结构中, 材料的主应力方向是沿着杆件方向, 不存在与杆件垂直的剪切应力. 但在优化过程中, 剪切模量不能忽略, 否则, 刚度矩阵会奇异. 假设材料的剪切应力和剪切应变间的关系为

$$\tau = E(t_1 + t_2) \gamma / 4. \quad (1)$$

写成矩阵形式则为

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \tau \end{bmatrix}^T = \mathbf{D}(t_1, t_2, 0) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \gamma \end{bmatrix}^T.$$

其中, 弹性矩阵  $\mathbf{D}(t_1, t_2, 0) = E \cdot \text{diag}[t_1 \quad t_2 \quad (t_1 + t_2)/4]$ .

对于 Michell 桁架结构, 相邻杆件没有相互作用, 所以取泊松比为零. 当  $t_1 = t_2 = 1$  时,  $\mathbf{D}(1, 1, 0) =$

收稿日期: 2008-04-13

通信作者: 周克民(1962-), 男, 教授, 博士, 主要从事结构拓扑优化的研究. E-mail: zhokm@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872072); 教育部科学技术研究重点项目(208169); 福建省自然科学基金资助项目(E0640010)

$E \cdot \text{diag}[1 \ 1 \ 1/2]$  成为各向同性材料.

### 1.2 整体坐标轴上的弹性矩阵

设纤维的方向角  $\alpha$ , 则在整体坐标系下材料的应力-应变关系可写为

$$\sigma = \mathbf{D}(t_1, t_2, \alpha) \varepsilon$$

利用坐标系的转换矩阵  $\mathbf{T}(\alpha)$ , 得到整体坐标系下弹性矩阵为

$$\mathbf{D}(t_1, t_2, \alpha) = \mathbf{T}^T(\alpha) \mathbf{D}(t_1, t_2, 0) \mathbf{T}(\alpha).$$

式中,  $\mathbf{T}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 0.5 \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -0.5 \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$ . 记  $\mathbf{D}_0 = \text{diag}[1 \ 1 \ 1/2]$ ,  $\mathbf{D}_c = \text{diag}[1 \ -1 \ 0]$ ,  $\mathbf{D}_s =$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, t_m = (t_1 + t_2)/2, t_a = (t_1 - t_2)/2.$$

弹性矩阵还可写为

$$\mathbf{D}(t_1, t_2, \alpha) = t_m \mathbf{D}_0 + t_a (\mathbf{D}_c \cos 2\alpha + \mathbf{D}_s \sin 2\alpha).$$

### 1.3 单元刚度矩阵

采用三角形单元, 单元内部的弹性矩阵由结点的弹性矩阵插值得到. 则刚度矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} d\Omega &= \sum_{j \in S_e} \int_{\Omega} N_j \mathbf{B}^T \mathbf{D}(t_{1,j}, t_{2,j}, \alpha_j) \mathbf{B} d\Omega = \\ &= \sum_{j \in S_e} \int_{\Omega} N_j \mathbf{B}^T [t_{m,j} \mathbf{D}_0 + t_{a,j} (\mathbf{D}_c \cos 2\alpha_j + \mathbf{D}_s \sin 2\alpha_j)] \mathbf{B} d\Omega = \\ &= \sum_{j \in S_e} [t_{m,j} \mathbf{K}_{0,j}^e + t_{a,j} (\mathbf{K}_{c,j}^e \cos 2\alpha_j + \mathbf{K}_{s,j}^e \sin 2\alpha_j)]. \end{aligned} \quad (2)$$

在式(2)中,  $\mathbf{K}_{0,j}^e = E \int_{\Omega} N_j \mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B} d\Omega = \frac{1}{3} EA_e \mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{K}_{c,j}^e = E \int_{\Omega} N_j \mathbf{B}^T \mathbf{D}_c \mathbf{B} d\Omega = \frac{1}{3} EA_e \mathbf{B}^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{K}_{s,j}^e = E \int_{\Omega} N_j \mathbf{B}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B} d\Omega = \frac{1}{3} EA_e \mathbf{B}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}$ ,  $t_{m,j} = (t_{1,j} + t_{2,j})/2$ ,  $t_{a,j} = (t_{1,j} - t_{2,j})/2$ . 其中,  $N_j$  为三角形单元的形函数,  $A_e$  为单元面积.

单元内部的杆件密度由结点位置的杆件密度插值得到, 结构体积为

$$\Omega = \sum_e \sum_b \int_{\Omega} \sum_{j \in S_e} N_j t_{b,j} d\Omega = \sum_{e,j} \sum_{b \in S_e} \int_{\Omega} N_j d\Omega \sum_b t_{b,j} = \sum_j \sum_b t_{b,j}. \quad (3)$$

式(3)中,  $z_j = \sum_{b \in S_j} \int_{\Omega} N_j d\Omega$  其中,  $S_j$  是与结点  $j$  相连的单元集合. 拓扑优化问题写成

$$\text{find} \{t_{1,j}, t_{2,j}, \alpha_j\}, \quad \min \Omega, \quad \text{s. t. } E\varepsilon \leq \sigma_p,$$

其中,  $\sigma_p$  为允许应力.

## 2 迭代方法

(1) 将设计域用三角形单元划分, 设定结点位置杆件的密度和方向的初始值. 即  $t_{1,j}^0 = t_{2,j}^0 = 1$ ,  $\alpha_j^0 = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, J$ ). 初始材料为各向同性, 其中下标  $j$  为结点号,  $J$  为结点总数.

(2) 经过有限元分析, 得到结点位置主应力方向  $\theta_j^i, \theta_j^{i+1} \in \pi/2$ .

(3) 将纤维方向调整到主应力方向, 第  $i$  次迭代过程中, 设结点  $j$  处两个方向对应的应变分别为  $\varepsilon_{1,j}^i, \varepsilon_{2,j}^i$ . 采用满应力准则法进行迭代, 有

$$\alpha_j^{i+1} = \theta_j^i, \quad t_{b,j}^{i+1} = E t_{b,j}^i \varepsilon_{b,j}^i / \sigma_p, \quad b = 1, 2$$

通过设置杆件密度的下限, 来避免由于杆件密度过小而导致单元刚度矩阵奇异, 规定

$$t_{b,j}^{i+1} = \max(t_{b,j}^{i+1}, \bar{t}_{b,j}^{i+1}), \quad b = 1, 2; \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

其中,  $\bar{t}_{b,j}^{i+1}$  为密度的下限值,  $\bar{t}_{b,j}^{i+1} = R \cdot \max(t_{b,j}^{i+1})$ , 而  $R$  是事先给定的一个很小的数. 此处,  $R = 10^{-7}$ .

(4) 当所有设计变量的最大相对改变值小于一个事先给定的  $\mu$  值时, 停止迭代, 取  $\mu = 10^{-4}$ ; 否则, 回到步骤(3).

### 3 数值算例

由于荷载的大小及材料的弹性模量  $E$  与优化结果无关, 都取单位 1.

例 1 图 1(a) 所示为初始设计域长  $2a$ , 宽  $a$  的矩形板, 左边固定, 右边自由, 在右边中间作用一竖直向下的集中力. 在图 1(a), (b) 显示了单元划分.

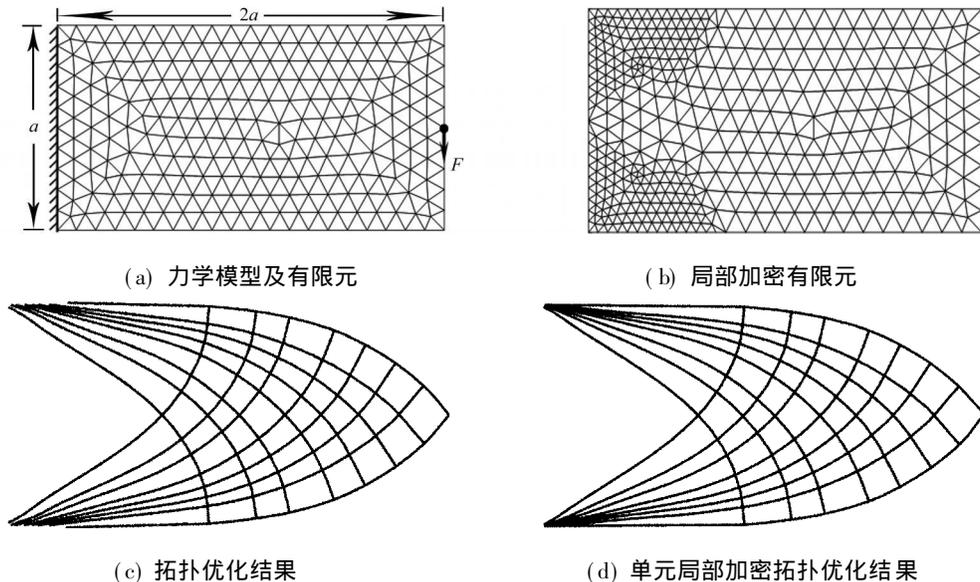


图 1 例 1 的拓扑优化设计

Fig. 1 Topology optimization of example 1

对比图 1(c), (d) 所得到的优化结果, 可以发现对优化模型进行局部加密后, 固定边杆件汇交的上下两个角点的计算结果得到明显改善.

例 2 图 2(a) 所示为初始设计域长  $2a$ , 宽  $a$  四角铰支的矩形板. 在中心有一个直径为  $0.5a$  的圆孔, 在圆孔的竖向直径的两端作用竖直向下的 2 个大小相等的集中力. 这属于不规则区域, 适于用三角单元. 图 2(b) 为其拓扑优化结果.

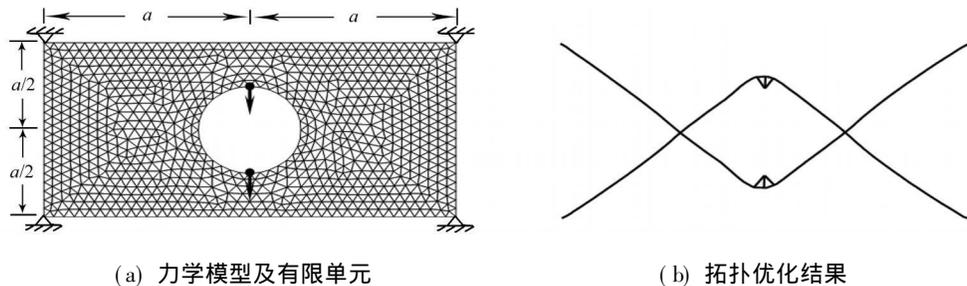


图 2 例 2 的拓扑优化设计

Fig. 2 Topology optimization of example 2

例 3 图 3(a) 所示为一不规则带孔板. 其左边完全固定, 距固定端  $a$  和  $2a$  处分布着 3 个直径均为

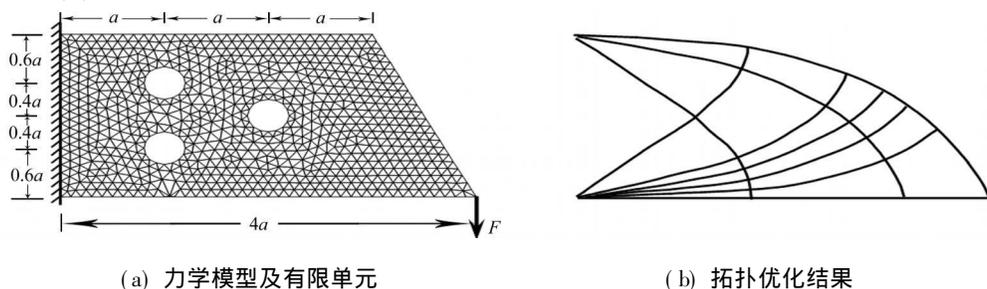


图 3 例 3 的拓扑优化设计

Fig. 3 Topology optimization of example 3

0.2a 的圆, 在底边的最右端作用一集中力. 图 3(b) 为其拓扑优化结果.

## 4 结束语

采用三角形有限单元, 有效地克服了对不规则区域及带孔区域进行划分单元的局限性. 尝试对单元模型进行局部加密, 尽量实现以最少的单元得到最优的结果, 算例表明优化结果得到明显的改善. 采用类桁架连续体材料模型, 有效地避免了拓扑优化过程中经常出现的单元铰接、棋盘格现象, 优化结果较好地体现了初始网格无关性.

### 参考文献:

- [ 1 ] MICHELL A G M. The limits of economy of material in frame structure[J]. Philosophical Magazine, 1904, 8( 6 ): 589-597.
- [ 2 ] COX H L. The design of structures of least weight[M]. Oxford: Pergamon, 1965.
- [ 3 ] HEGEMINER G A, PRAGER W. On michell trusses[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1969, 11(2): 209-215.
- [ 4 ] ROZVANY G I N. Some shortcomings in michell trusses theory[J]. Structural Optimization, 1996, 12(4): 244-250.
- [ 5 ] ROZVANY G I N. Partial relaxation of the orthogonality requirement for classical michell trusses[J]. Structural Optimization, 1997, 13( 4 ): 271-274.
- [ 6 ] 杨德庆, 隋允康. 桁架结构拓扑优化设计密度变量的两种模式[J]. 力学与实践, 1997, 19( 5 ): 7-11.
- [ 7 ] BENDSOE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, 71(2): 197-224.
- [ 8 ] 程耿东. 关于桁架结构拓扑优化中的奇异最优解[J]. 大连理工大学学报, 2000, 40(4): 379-383.
- [ 9 ] 隋允康, 彭细荣. 结构拓扑优化 ICM 方法的改善[J]. 力学学报, 2005, 37(2): 190-198.
- [ 10 ] 隋允康, 杨德庆, 孙焕纯. 统一骨架与连续体的结构拓扑优化的理论与方法[J]. 计算力学学报, 2000, 17( 1 ): 28-33.
- [ 11 ] 周克民, 胡云昌. 利用有限元构造 Michell 桁架的一种方法[J]. 力学学报, 2002, 34( 6 ): 935-940.
- [ 12 ] 周克民, 李 霞. 长悬臂桁架受横向集中力的拓扑优化[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2009, 30( 1 ): 80-84.

## Topology Optimization of Truss Like Continuum Structures by Triangle Elements

YAN Kai, ZHOU Ke-min

( College of Civil Engineering, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** To overcome the difficulty in dividing irregular design domain by rectangular elements and to distribute the nodes and elements reasonably, the topology optimal truss like continuum structures are established by triangle elements with constant strain. The densities and orientations of members at nodes are taken as design variables, which is optimized by optimality criteria method. During the iteration, the member orientations are aligned along the principal stress directions. The member densities are adjusted according to the magnitudes of strains along the principal stress. By local mesh refinement, the structures at members' intersection become explicit. The rationality and efficiency of the presented method is demonstrated by examples.

**Keywords:** topology optimization; truss like continuum; stress constraints; triangle element

(责任编辑: 黄仲一 英文审校: 方德平)