

文章编号: 1000-5013(2009)02-0151-04

PRONY 算法在短(窄)脉冲分析中的应用

谢维波, 林楠

(华侨大学 计算机科学与技术学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 为了解决信号分析中的去除噪声问题, 准确地或较好地恢复原信号, 在分析周期信号的基础上, 提出了一种基于 PRONY 模型的周期信号分析法. 通过对周期短(窄)脉冲包括噪声及非整数倍周期的算例分析, 结果表明, PRONY 法可以准确估计信号中各分量的振幅、频率、相位, 利用这些参数较好地拟合出原波形, 并抑制一定的噪声. 该方法弥补了经典谱估计无法分析非整数倍谐波和没有噪声抑制功能的缺点.

关键词: PRONY 算法; 周期信号; 短(窄)脉冲; 谐波分析

中图分类号: TN 911.6

文献标识码: A

长期以来, 对于信号的研究一般都采用 Fourier 分析方法, 它可以实现整数次谐波的精确分析^[1]. 然而, 信号中不仅有整数次谐波, 还存在许多非整数倍的间谐波. 文[1-3]阐述了谐波分析的一些方法, 如快速傅里叶变换(FFT)算法、小波分析方法. 其中, 利用加窗插值的 FFT 算法可以较好地消除频谱泄漏和栅栏现象, 但会导致谐波分辨率的降低. 利用连续小波变换可以实现间谐波检测, 但由于不同尺度的小波函数在频域中存在相互干扰, 当被检测信号中含有频率相近的谐波分量时, 无法将它们分离. PRONY 是使用指数函数的线性组合, 来描述等间距采样数据的数学模型^[4]. 短(窄)脉冲是一个典型的周期性脉冲, 在现实中很难用仪器直接测量. 本文将 PRONY 算法应用于短(窄)脉冲的研究.

1 经典谱估计的局限性

以傅里叶变换为基础的经典谱估计方法具有计算效率高的优点, 一直以来是谐波分析的主要工具. 随着信号分析方法的不断更新, 这种经典分析方法的局限性日益暴露出来. Fourier 分析方法能够分析出整数倍的信号谐波, 却无法准确分析出非整数倍的间谐波. 其次, 经典谱估计的频率分辨率不高. 经典谱估计的频率分辨率与数据纪录的长度成反比关系, 用来分析无限长数据时一般进行加窗处理, 而窗口宽度在分析间谐波时需要加宽. 再者, 间谐波的幅值往往远小于基波与谐波分量的幅值, 即存在频谱泄露的问题.

Fourier 变换中, 矩形窗的频谱主瓣不是无限窄的, 且有旁瓣存在. 这将导致能量向旁瓣中“泄漏”, 使主瓣产生很大失真, 甚至主瓣中的弱分量被旁瓣中的强泄漏所掩盖^[5]. 因此, 基于 Fourier 变换的经典谱估计用于间谐波的测量带有很大的局限性.

2 线性 PRONY 模型

2.1 PRONY 建模

扩展 PRONY 方法采用的数学模型为一组 N 个具有任意幅值、相位、频率与衰减因子的指数函数^[6], 其离散时间的函数形式为

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^N b_i z_i^n, \quad n = 0, 1, \dots, M-1. \quad (1)$$

收稿日期: 2008-07-19

通信作者: 谢维波(1964-), 男, 副教授, 主要从事信号处理及智能信息处理的研究. E-mail: xwb1xf@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(A0540005)

定义式(1)的参数: 幅值 $A_i = |b_i|$; 相位 $\theta_i = \arctan[\operatorname{Im}(b_i)/\operatorname{Re}(b_i)]/2\pi$; 衰减因子 $\alpha_i = \ln|z_i|/\Delta t$, 周期信号中的衰减因子为零; 频率 $f_i = \arctan[\operatorname{Im}(z_i)/\operatorname{Re}(z_i)]/(2\pi\Delta t)$; Δt 为采样间隔. 因此, 构造代价函数为

$$Q = \sum_{n=0}^{M-1} |x(n) - \hat{x}(n)|^2. \tag{2}$$

上式中, $x(n)$ 为观测数据. 如果使 Q 最小化, 就可以估计出式(1)中定义的参数值. 式(2)是一个非线性方程, Q 的严格最小化将导致非线性求解. 下面, 采用线性化的扩展 PRONY 方法^[6] 求解式(2).

定义特征多项式为

$$\prod_{i=1}^N (z - z_i) = \sum_{j=0}^N a_j z^j. \tag{3}$$

其中, $a_0 = 1$. 记 $x(n)$ 与其估计值 $\hat{x}(n)$ 之间的误差为 $e(n)$, 即

$$x(n) = \hat{x}(n) + e(n), \quad n = 0, 1, \dots, M-1,$$

则有

$$\sum_{j=0}^N x(j+m)a_j = \sum_{n=0}^N e(j+m)a_j = \varepsilon_m, \quad m = 0, 1, \dots, M-N-1. \tag{4}$$

在 $M-N > N+1$ 时, 可由超定方程

$$\begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(N) \\ x(1) & x(2) & \cdots & x(N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(M-N-1) & x(M-N) & \cdots & x(M-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

唯一地确定参数 $a = [1, a_1, \dots, a_N]^T$.

2.2 周期信号中 PRONY 模型的求解

将式(5)改写为

$$\sum_{j=0}^N x(j+m)a_j = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-N-1. \tag{6}$$

对于周期信号, 取 $N = 2p+1$, 有

$$a_{p-i} = a_{p+1+i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, p.$$

令 $j = p-i$, 即 $a_j = a_{2p+1-j}, j = 0, 1, 2, \dots, p$, 则有

$$\sum_{j=0}^N x(j+m)a_j = \sum_{j=0}^p x(j+m)a_j + \sum_{j=p+1}^N x(j+m)a_j. \tag{7}$$

令 $t = j - (p+1)$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{j=p+1}^N x(j+m)a_j &= \sum_{t=0}^{N-(p+1)} x(t+(p+1)+m)a_{t+(p+1)} = \\ &= \sum_{t=0}^p x(t+(p+1)+m)a_{t+(p+1)}. \end{aligned} \tag{8}$$

而令 $s = p-t$, 则有

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^p x(t+(p+1)+m)a_{t+(p+1)} &= \sum_{s=p}^0 x(p-s+(p+1)+m)a_{p-s+(p+1)} = \\ &= \sum_{s=p}^0 x(2p+1-s+m)a_{2p+1-s} = \sum_{s=0}^p x(2p+1-s+m)a_{2p+1-s} = \\ &= \sum_{j=0}^p x(2p+1-j+m)a_{2p+1-j} \end{aligned} \tag{9}$$

故有

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N x(j+m)a_j &= \sum_{j=0}^p x(j+m)a_j + \sum_{j=p+1}^N x(j+m)a_j = \\ &= \sum_{j=0}^p x(j+m)a_j + \sum_{j=0}^p x(2p+1-j+m)a_{2p+1-j} = \\ &= \sum_{j=0}^p [x(j+m) + x(2p+1-j+m)]a_j. \end{aligned} \tag{10}$$

则式(5)可改写为

$$\begin{bmatrix} x(0) + x(2p + 1) & x(1) + x(2p) & \cdots & x(p) + x(p + 1) \\ x(1) + x(2p + 2) & x(2) + x(2p + 1) & \cdots & x(p + 1) + x(p + 2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(M - 2p - 2) + x(M - 1) & x(M - 2p - 1) + x(M - 2) & \cdots & x(M - p - 2) + x(M - 1 - p) \end{bmatrix} \times$$
$$\begin{bmatrix} 1, a_1, \dots, a_p \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0, 0, \dots, 0 \end{bmatrix}^T.$$

由以上方程可求出 $\{a_j\}, j = 0, 1, \dots, N$, 从而可求得方程 $\sum_{j=0}^N a_j z^j = 0$ 的特征根 $\{z_i\}, i = 1, 2, \dots, N$, 进而可以方便地求得 $\{b_i\}, i = 1, 2, \dots, N$. 因此, 由式(1)可构造出原来的模型数据.

3 算例分析

3.1 短(窄)脉冲

以具有丰富谐波分量的短(窄)脉冲作为分析对象, 原信号加噪声后及 FFT 拟合波形、PRONY 拟合波形, 如图 1 所示. 其中, 原脉冲的参数: 周期为 1 s, 脉冲宽度为 50 ms, 采样间隔为 1/512 s, 采样点为 1 024 个, 另外还有 10% 的随机噪声(信噪比为 20 dB); FFT 取满 1 024 个采样点; 而由于分析对象具有

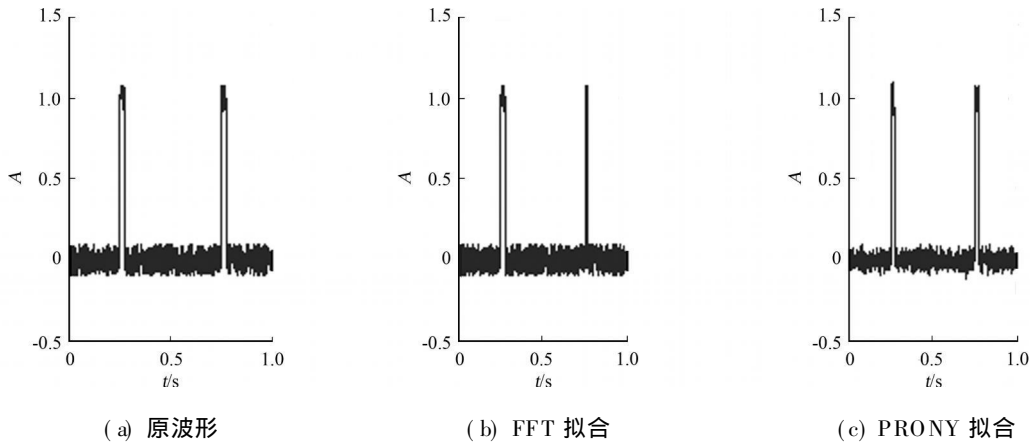


图 1 加噪声后的短(窄)脉冲波形

Fig. 1 Short (narrow) pulse with noise

丰富的谐波分量, PRONY 方法的阶数为 280 阶. 从图 1 可以看出, 加窗 FFT 不具有抑制噪声的功能; 而 PRONY 算法不但较好地拟合出原波形, 而且在一定程度上起到了抑制噪声的作用.

3.2 非整数倍周期信号

仍以上述的短(窄)脉冲作为分析对象, 不加噪声但采样点取 768 个, 即取非整数倍周期, 如图 2 所

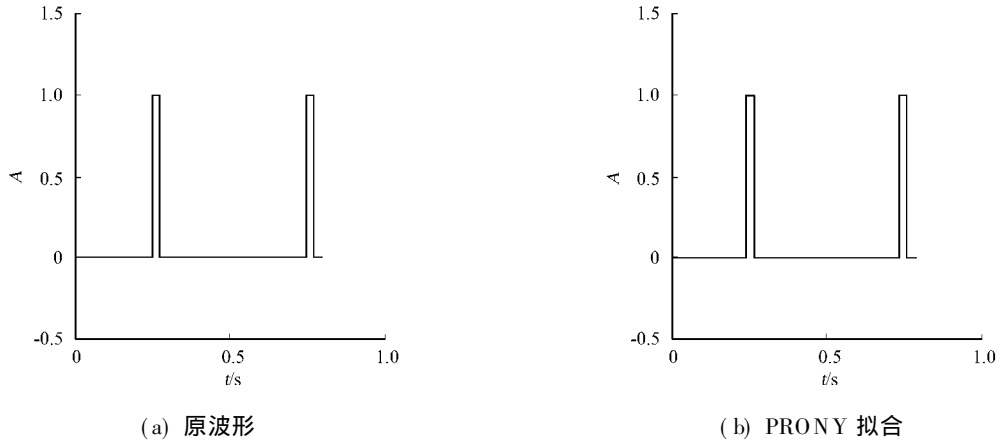


图 2 非整数倍周期的短(窄)脉冲波形

Fig. 2 Short (narrow) pulse with non integral

示. 从图 2 可以看出, PRONY 算法可以较好地拟合出原波形. 这也证明了, 对于非整数倍周期的信号, PRONY 算法也能较好地拟合.

4 结 束 语

PRONY 法是一种有效的周期信号分析方法, 弥补了经典谱估计无法分析非整数倍谐波和没有噪声抑制功能的缺点. 通过对周期短(窄)脉冲的分析, 包括噪声以及非整数倍周期的分析, 验证了该算法的有效性. 本文 PRONY 算法是应用在高信噪比情况下的, 如何在低信噪比的环境下, 也能令 PRONY 算法较好地工作是进一步研究的问题.

参考文献:

[1] 姚若苹, 余尤好, 陈培民. 11 相无刷励磁机故障工况的谐波分析[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2007, 28(1): 127-130.
[2] 祈才君, 王小梅. 基于插值 FFT 算法的间谐波参数估计[J]. 电工技术学报, 2003, 18(1): 92-95.
[3] 薛 惠, 杨仁刚. 基于连续小波变换的非整数次谐波测量方法[J]. 电力系统自动化, 2003, 27(5): 49-53.
[4] 丁屹峰, 程浩忠, 吕干云, 等. 基于 PRONY 算法的谐波和间谐波频谱估计[J]. 电工技术学报, 2005, 20(10): 94-97.
[5] 袁拓来, 徐唐煌. 基于 PRONY 谱线估计方法的间谐波检测[J]. 湖北电力, 2006, 30(5): 8-10.
[6] 张贤达. 现代信号处理[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2002.

Analysis on Short (Narrow) Pulse by PRONY Algorithm

XIE Wei-bo, LIN Nan

(College of Computer Science and Technology, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: To eliminating the noise in signal and reconstructing signal accurately, a cycle signal analysis based on the PRONY model has been proposed. Analyzing to the cyclical short (narrow) pulse including noise and non integral multiple cycle, it indicated that the PRONY method may estimate accurately the amplitude, frequency and phase of various components in signal. Using these parameters, the original signal can be better reconstructed and the noise can also be suppressed. The shortcoming of the classical spectrum estimation is unable to analyze the non integral multiple harmonic and can't suppress noise those are made up by this method.

Keywords: PRONY algorithm; cycle signal; short/narrow pulse; harmonic analysis

(责任编辑: 黄仲一 英文审校: 吴逢铁)

• 喜讯 •

本刊荣获全国高校优秀期刊
并再次入编中文核心期刊

2008 年, 在教育部主办的“第二届中国高校精品·优秀·特色科技期刊”评比中,《华侨大学学报(自然科学版)》(以下简称《学报》)获得“第二届全国高校优秀科技期刊”、“全国高校优秀科技期刊编辑部”的称号. 同时, 经过严格的定量筛选和百余名专家的定性评审,《学报》再次入编《中文核心期刊要目总览(第五版)》之综合性科学技术类的核心期刊.

此外, 2008 年《学报》还获得“教育部中国科技论文在线优秀期刊‘二等奖’”, 全国首批“编校无差错承诺活动”合格刊社等荣誉.

《学报》将继续秉持创新性、前瞻性、学术性的办刊特色, 充分发掘并发挥好办刊优势, 以高度的责任感为读者打造优质的期刊读物, 全面提升《学报》的科技竞争力和影响力. 同时, 也热忱希望广大的读者能继续给予《学报》大力支持和关心.

《华侨大学学报(自然科学版)》编辑部