第30卷　第2期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 30　No. 2
2009年3月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Mar. 2009

文章编号:　1000-5013(2009)02-0139-04

场论说对网络等效变换一般形式的推导

吴春曙, 王建成, 梁　昕

(华侨大学 信息科学与工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要:　应用场论说的非线性网络节点电压法一般形式的网络状态方程, 以及同时可表示节点复自导和节点复互导的新公式, 推导 n 端口星形连接网络和 n 端口网形连接网络的等效变换一般形式公式. 当 $n=2$ 时, 可以由星形连接网络变为网形连接网络, 但不能由网形连接网络变为星形连接网络; 当 $n=3$ 时, 星形连接网络和网形连接网络的支路数一样, 它们之间有相互对应的等效变换公式. 以上变换是在假设 $G_{\Sigma}\neq 0$ 的条件下实现的.

关键词:　场论说; 等效变换; 非线性网络; 星形连接; 网形连接

中图分类号:　TN 711　　　　文献标识码:　A

自1985年创立以来, 场论说的研究取得了重大进展[1-6]. 它可以运用纯逻辑推理去演绎电路中的有关问题. 在一般电路教材中, 只讲述线性网络的星形连接网络和网形连接网络等效变换公式, 未见非线性网络等效变换公式. 本文把场论说的非线性网络节点电压法一般形式方程[7]应用于求解网络的等效变换公式.

1　一般形式网络状态方程

对于一个不含互感的任意网络, 它有 B 条支路和 N 个节点. 用非拓扑的场论方法, 可推导节点电压法的一般形式网络状态方程的复数形式为[7]

$$\sum_{\mu'=1}^{N-1}\dot{G}'_{\mu\mu'}\dot{v}_{\mu'}=\dot{I}'_{s,\mu},\qquad \mu=1,2,\cdots,N-1. \tag{1}$$

式(1)中, μ 和 μ' 为节点序数, N 为网络的节点数, $\dot{v}_{\mu}$ 为第 μ 个节点的节点电压. $\dot{I}_{s,\mu}$ 为流入或流出第 μ 个节点的总电流, $\dot{I}_{s,\mu}>0$ 表示与节点 μ 有连通的所有支路上由电流源及由电压源等效变换成的电流源, 两者所流入节点的总电流; $\dot{I}_{s,\mu}<0$ 则表示两者从节点流出的总电流. $\dot{I}_{s,\mu}$ 与节点 μ 中第 t 支路上的电流源 $\dot{I}_{s\mu t}$ 和 $\dot{V}_{s\mu t}$ 电压源有如下关系

$$\dot{I}_{s,\mu}=-\sum_{t=1}^{B}\cos(\dot{J}_{\mu,t},\mathrm{d}\dot{S}_{\mu,t})\dot{G}_{\mu,t}\dot{V}_{s,\mu,t}-\sum_{t=1}^{B}\cos(\dot{J}_{\mu,t},\mathrm{d}\dot{S}_{\mu,t})\dot{I}_{s,\mu,t},\qquad \mu=1,2,\cdots,N-1. \tag{2}$$

式(2)中, $\dot{J}_{\mu,t}$ 方向为与节点 μ 连接的 t 支路的电流方向, $\mathrm{d}\dot{S}_{\mu,t}$ 为节点 μ 的法线方向.

在式(1)中, $\dot{G}'_{\mu\mu'}$ 为节点的复自导或复互导, 它与支路 t 上的复合复电导 $\dot{G}_{\mu,t}$ 的关系为

$$\dot{G}'_{\mu\mu'}=\sum_{t=1}^{B}\cos(\dot{J}_{\mu,t},\mathrm{d}\dot{S}_{\mu,t})\cos(\dot{J}_{\mu',t},\mathrm{d}\dot{S}_{\mu',t})\dot{G}_{\mu,t},\qquad \mu=1,2,\cdots,N-1;\quad \mu'=1,2,\cdots,N-1. \tag{3}$$

当 $\mu=\mu'$ 时, 式(3)可写成

$$\dot{G}'_{\mu\mu}=\sum_{t=1}^{B}\cos^{2}(\dot{J}_{\mu,t},\mathrm{d}\dot{S}_{\mu,t})\dot{G}_{\mu,t},\qquad \mu=1,2,\cdots,N-1. \tag{4}$$

此时, $\dot{G}'_{\mu\mu}$ 的物理意义是表示与节点 μ 相连通的所有支路上的复合复电导之和, 称为复自导. 由式(4)表明, 复自导永远为正.

当 $\mu\neq\mu'$ 时, $\dot{G}'_{\mu\mu'}$ 可表示为

收稿日期:　2007-11-02

通信作者:　王建成(1943-), 男, 教授, 主要从事电路理论和微电子技术的研究. E-mail: wangjc@hqu.edu.cn.

$$\dot{G}'_{\mu\mu'} = \sum_{t=1}^{B} \dot{G}_{\mu,t}, \qquad \mu = 1, 2, \cdots, N-1; \quad \mu' = 1, 2, \cdots, N-1. \tag{5}$$

其中, n_2 为直接联系于两节点 μ 和 μ' 之间的支路数. 由此可见, $\dot{G}'_{\mu,\mu'}$ 的物理意义是表示直接联系着两个节点 μ 和 μ' 之间的各支路上的复合复电导之和的负值, 称为复互导. 由式(5)表明, 复互导永远为负.

2 等效变换

设星形连接网络(以下简称星形网络)有 $n+1$ 个节点, 每个节点到中心点 0 均有一条支路相联, 其复合复电导为 $\dot{G}_i(i=1, 2, \cdots, n)$, 如图 1 所示. 现将它变换成具有 n 个节点(将中心点 0 移去)的完全图网络(所谓完全图意指该图中任意两个节点之间有一条也只有一条支路相联接), 如图 2 所示, 即为网形连接网络(以下简称网形网络). 这个具有 n 个节点的完全图网络, 其任意两个节点之间的支路复合复电导 $\dot{G}_{i,j}(i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, n; i\neq j)$, 就是星形网络等效变换为网形网络的公式.

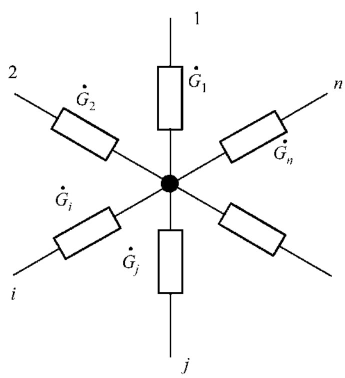

图 1 $(n+1)$个节点的星形连接网络

Fig.1 $(n+1)$-stars-shape network

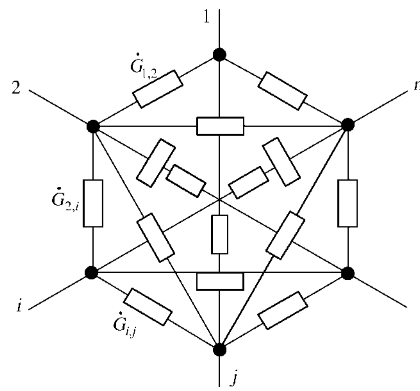

图 2 n 个节点的完全图(网形连接网络)

Fig.2 n-net-shape network

对于星形网络, 设 $\dot{v}_1, \dot{v}_2, \cdots, \dot{v}_n$ 为各端点的电位, 中心点的电位为 $\dot{v}_0$, 且流入或流出各节点的等效电流源为 $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \cdots, \dot{I}_n$, 流过中心点的等效总电流为 $\dot{I}_0$ 为 0. $\dot{G}_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为各支路的复合复电导.

应用式(1)写出星形网络的节点电压法网络状态方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{G}_\Sigma\dot{v}_0 - \dot{G}_1\dot{v}_1 - \dot{G}_2\dot{v}_2 - \cdots - \dot{G}_n\dot{v}_n = 0,\\
&-\dot{G}_1\dot{v}_0 + \dot{G}_1\dot{v}_1 = \dot{I}_1,\\
&-\dot{G}_2\dot{v}_0 + \dot{G}_2\dot{v}_2 = \dot{I}_2,\\
&\qquad\vdots\\
&-\dot{G}_i\dot{v}_0 + \dot{G}_i\dot{v}_i = \dot{I}_i,\\
&\qquad\vdots\\
&-\dot{G}_n\dot{v}_0 + \dot{G}_n\dot{v}_n = \dot{I}_n.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中, $\dot{G}_\Sigma = \dot{G}_1 + \dot{G}_2 + \cdots + \dot{G}_n$, 即为中心点 0 的复合复自导. 当 $\dot{G}_\Sigma \neq 0$ 时, 消去节点电压 $\dot{v}_0$, 经整理可得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\dot{G}_\Sigma}[\dot{G}_1(\dot{G}_\Sigma - \dot{G}_1)\dot{v}_1 - \dot{G}_1\dot{G}_2\dot{v}_2 - \dot{G}_1\dot{G}_3\dot{v}_3 - \cdots - \dot{G}_1\dot{G}_n\dot{v}_n] = \dot{I}_1,\\
&\frac{1}{\dot{G}_\Sigma}[-\dot{G}_2\dot{G}_1\dot{v}_1 + \dot{G}_2(\dot{G}_\Sigma - \dot{G}_2)\dot{v}_2 - \dot{G}_2\dot{G}_3\dot{v}_3 - \cdots - \dot{G}_2\dot{G}_n\dot{v}_n] = \dot{I}_2,\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{1}{\dot{G}_\Sigma}[-\dot{G}_i\dot{G}_1\dot{v}_1 - \cdots + \dot{G}_i(\dot{G}_\Sigma - \dot{G}_i)\dot{v}_i - \cdots - \dot{G}_i\dot{G}_n\dot{v}_n] = \dot{I}_i,\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{1}{\dot{G}_\Sigma}[-\dot{G}_n\dot{G}_1\dot{v}_1 - \dot{G}_n\dot{G}_2\dot{v}_2 - \cdots - \dot{G}_n\dot{G}_{n-1}\dot{v}_{n-1} + \dot{G}_n(\dot{G}_\Sigma - \dot{G}_n)\dot{v}_n] = \dot{I}_n.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

把式(7)表示成矩阵形式, 有

$$\frac{1}{\dot G_\Sigma}\begin{bmatrix} \dot G_1(\dot G_\Sigma-\dot G_1) & -\dot G_1\dot G_2 & -\dot G_1\dot G_3 & \cdots & -\dot G_1\dot G_n \\ -\dot G_2\dot G_1 & \dot G_2(\dot G_\Sigma-\dot G_2) & -\dot G_2\dot G_3 & \cdots & -\dot G_2\dot G_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\dot G_i\dot G_1 & \cdots & \dot G_i(\dot G_\Sigma-\dot G_i) & \cdots & -\dot G_i\dot G_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\dot G_n\dot G_1 & -\dot G_n\dot G_2 & \cdots & -\dot G_n\dot G_{n-1} & \dot G_n(\dot G_\Sigma-\dot G_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot v_1\\ \dot v_2\\ \vdots\\ \dot v_i\\ \vdots\\ \dot v_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot I_1\\ \dot I_2\\ \vdots\\ \dot I_i\\ \vdots\\ \dot I_n\end{bmatrix}. \quad (8)$$

对于网形网络, 设各节点对应的电位分别为 $\dot v'_1, \dot v'_2, \dots, \dot v'_n$, 流入或流出各节点等效电流源分别为 $\dot I'_1, \dot I'_2, \dots, \dot I'_n$. $\dot G_{i,j}(i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,n; i\neq j)$ 为节点 i 和 j 节点之间支路的复合复电导.

应用式(1) 写出星形网络的节点电压法网络状态方程为

$$\left.\begin{aligned} &\dot G_{1,\Sigma}\dot v'_1-\dot G_{1,2}\dot v'_2-\dot G_{1,3}\dot v'_3-\cdots-\dot G_{1,n}\dot v'_n=\dot I'_1,\\ &-\dot G_{2,1}\dot v'_1+\dot G_{2,\Sigma}\dot v'_2-\dot G_{2,3}\dot v'_3-\cdots-\dot G_{2,n}\dot v'_n=\dot I'_2,\\ &\qquad\vdots\\ &-\dot G_{i,1}\dot v'_1-\cdots+\dot G_{i,\Sigma}\dot v'_i-\cdots-\dot G_{i,n}\dot v'_n=\dot I'_i,\\ &\qquad\vdots\\ &-\dot G_{n,1}\dot v'_1-\dot G_{n,2}\dot v'_2-\cdots-\dot G_{n,(n-1)}\dot v'_n+\dot G_{n,\Sigma}\dot v'_n=\dot I'_n.\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

其中, $\dot G_{i,\Sigma}$ 为节点的复合复自导, 即 $\dot G_{i,\Sigma}=\dot G_{i,1}+\dot G_{i,2}+\cdots+\dot G_{i,(i-1)}+\dot G_{i,(i+1)}+\cdots+\dot G_{i,n}$. 把式(9) 表示成矩阵形式, 有

$$\begin{bmatrix} \dot G_{1,\Sigma} & -\dot G_{1,2} & -\dot G_{1,3} & \cdots & -\dot G_{1,n}\\ -\dot G_{2,1} & \dot G_{2,\Sigma} & -\dot G_{2,3} & \cdots & -\dot G_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -\dot G_{i,1} & \cdots & \dot G_{i,\Sigma} & \cdots & -\dot G_{i,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -\dot G_{n,1} & -\dot G_{n,2} & \cdots & -\dot G_{n,(n-1)} & \dot G_{n,\Sigma}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot v'_1\\ \dot v'_2\\ \vdots\\ \dot v'_i\\ \vdots\\ \dot v'_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot I'_1\\ \dot I'_2\\ \vdots\\ \dot I'_i\\ \vdots\\ \dot I'_n\end{bmatrix}. \quad (10)$$

星形网络变换为网形网络的等效条件, 是它们对应端子之间具有相同的电压. 它们各对应节点的电位应相等, 即 $\dot v_i=\dot v'_i(i=1,2,\dots,n)$ 且各对应节点的电流相等, 有 $\dot I_i=\dot I'_i(i=1,2,\dots,n)$.

将式(8) 与式(10) 相比较, 可得星形网络等效变换为网形网络的公式为

$$\dot G_{ij}=\frac{\dot G_i\dot G_j}{\dot G_\Sigma},\qquad i=1,2,\dots,n;\quad j=1,2,\dots,n;\quad i\neq j. \quad (11)$$

当星形网络和网形网络的节点数 $n=3$ 时, 将星形网络变换成网形网络, 其等效变换公式为

$$\left.\begin{aligned} \dot G_{1,2}&=\frac{\dot G_1\dot G_2}{\dot G_\Sigma}=\frac{\dot G_1\dot G_2}{\dot G_1+\dot G_2+\dot G_3},\\ \dot G_{1,3}&=\frac{\dot G_1\dot G_3}{\dot G_\Sigma}=\frac{\dot G_1\dot G_3}{\dot G_1+\dot G_2+\dot G_3},\\ \dot G_{2,3}&=\frac{\dot G_2\dot G_3}{\dot G_\Sigma}=\frac{\dot G_2\dot G_3}{\dot G_1+\dot G_2+\dot G_3}.\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

由式(12) 变形即可得由网形网络变换成星形网络的等效变换公式, 有

$$\left.\begin{aligned} \dot G_1&=\frac{\dot G_{1,2}\dot G_{1,3}+\dot G_{1,2}\dot G_{1,3}+\dot G_{1,3}\dot G_{2,3}}{\dot G_{2,3}},\\ \dot G_2&=\frac{\dot G_{1,2}\dot G_{1,3}+\dot G_{1,2}\dot G_{1,3}+\dot G_{1,3}\dot G_{2,3}}{\dot G_{1,3}},\\ \dot G_3&=\frac{\dot G_{1,2}\dot G_{1,3}+\dot G_{1,2}\dot G_{1,3}+\dot G_{1,3}\dot G_{2,3}}{\dot G_{1,2}}.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

当 $n=2$ 时, 式(11) 变为

$$\dot G_{1,2}=\frac{\dot G_1\dot G_2}{\dot G_1+\dot G_2}. \quad (14)$$

这就是网络的串联等效变换公式.

3 结论

需要指出的是, 当节点数 $n>3$ 时, 网形网络的支路数 $n(n-1)/2$ 大于星形网络的支路数 n; 当 $n=2$ 时, 易得网形网络的支路数为 1, 而星形网络的支路数为 2. 所以, 可以由星形网络变网形网络, 但不能由网形网络变换成星形网络. 只有当 $n=3$ 时, 星形网络和网形网络的支路数一样, 即都是 3 条支路时, 它们之间才有相互对应的等效变换公式, 即式(12)和式(13). 此外, 以上变换是在假设 $\dot{G}_{\Sigma}\neq 0$ 的条件下实现的, 在今后的计算中应考虑这个约束条件.

星形网络变为网形网络的等效变换公式(11), 是在非线性网络节点电压法一般形式方程的基础上推导出来的, 对于多个节点的复数导纳都适用. 当式(1)包含的 3 种电路元件都由非线性过渡到线性时, 相应地式(11)就变为正弦稳态线性网络的等效变换公式; 当式(1)又从正弦稳态线性网络过渡到电阻性稳恒线性网络时, 则式(11)就变为纯电阻线性网络的等效变换公式. 这只要把式(11)中的复数改为实数就可以了, 其结果与电路理论书的结果一致[8-9].

网络的等效变换及其简化公式是电路理论的基本分析方法之一, 而星形网络等效变换为网形网络又是网络等效变换的重要内容. 本文用场论说的方法得到的其等效变换公式的一般形式, 相比较于传统方法的星形网络/网形网络变换公式, 它拓宽了应用范围和物理意义, 这也是场论说的新应用.

参考文献:

[1] 陈燊年. 网络现代场论的建立和进展[J]. 科学通报, 1996, 41(15): 1345-1350.

[2] 陈燊年, 何煜光. 非线性网络与线性网络统一的场论说[J]. 中国科学: A 辑, 1994, 24(12): 1316-1326.

[3] 陈燊年. 场论的积分形式的两组独立的电路方程组是电路中的基本定律[J]. 中国科学: G 辑, 2005, 35(1): 47-61.

[4] 陈燊年, 何煜光, 陈 洁. 网络现代场论[M]. 北京: 电子工业出版社, 1991.

[5] 陈燊年, 陈思明, 王建成. 从麦克斯韦方程组建立的新电路理论[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[6] 王建成. 各向异性磁介质毕奥-萨伐尔定律极坐标形式[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 1996, 17(4): 354-357.

[7] 王建成, 苏武浔, 陈燊年. 场论说对非线性网络节点电压法一般形式方程的推导[J]. 电子学报, 1998, 26(6): 78-81.

[8] 邱关源. 电路[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[9] 陈崇源. 高等电路[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2000.

The Most General Equation of Equivalent Transformation for Network with Field Theory

WU Chun-shu, WANG Jian-cheng, LIANG Xin

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In order to deduce the most general equation of equivalent transformation for n-stars-shape network to n-net-shape network, this paper exploits the most general equation of node electrical potential with field theory in nonlinear network and the new formula which can be expressed by complex self-inductance and mutual-inductance simultaneously, when $n=2$, the stars-shape network can be changed to the net-shape network. On the contrary, the net-shape network can not be changed to the stars-shape network. When $n=3$ and $\dot{G}_{\Sigma}\neq 0$, there is the formula of equivalent transformation between stars-shape network and net-shape network, because they have the same branches.

Keywords: field theory; equivalent transformation; nonlinear network; stars-shape network; net-shape network

(责任编辑: 鲁 斌 英文审校: 吴逢铁)