第 30 卷　第 1 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 30　No. 1
2009 年 1 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jan. 2009

文章编号: 1000-5013(2009)01-0108-03

Beurling-Ahlfors 扩张伸张函数的估计

王朝祥

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 设 $h(x)$ 是实轴上的保向同胚, 满足 $h(\pm\infty)=\pm\infty$. 当 $h(x)$ 的拟对称函数 $\rho(x,t)$ 被递减函数 $\rho(t)$ 所控制时, $h(x)$ 的 Beurling-Ahlfors 扩张的伸张函数具有以下估计: 当 $\rho^* \geqslant \frac{4}{\sqrt{5}}$ 时, $D\leqslant 2\rho^*$; 而当 $1\leqslant\rho^*<\frac{4}{\sqrt{5}}$ 时, $D\leqslant 2\rho^*+\frac{1}{2\rho^*}$. 其中, $\rho^*=\rho(\frac{y}{2})$.

关键词: 拟共形映照; Beurling-Ahlfors 扩张; 伸张函数; 拟对称函数
中图分类号: O 174.55　　文献标识码: A

1 研究背景

设函数 $h(x)$ 为实轴上的保向同胚, 且保持无穷远点不动. 定义其拟对称函数 $\rho(x,t)=\dfrac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)}$, $x\in\mathbf{R}$, $t>0$. 若存在常数 $\rho\geqslant 1$, 使得 $\rho^{-1}\leqslant\rho(x,t)\leqslant\rho$, 对一切 $x\in\mathbf{R}$, $t>0$ 成立, 则称 $h(x)$ 为 ρ-对称函数, 同时, 称该条件为 ρ-条件. Beurling[1-2] 证明, $h(x)$ 具有上半平面到自身上的拟共形扩张的充分必要条件是 $h(x)$ 满足 ρ-条件, 并且构造出 Beurling-Ahlfors 扩张函数 $\varphi(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$. 其中, $u(x,y)=\dfrac{1}{2y}\int_{x-y}^{x+y}h(t)\,\mathrm{d}t$, $v(x,y)=\dfrac{1}{2y}\left(\int_{x}^{x+y}h(t)\,\mathrm{d}t-\int_{x-y}^{x}h(t)\,\mathrm{d}t\right)$. 记 $D(z)=\dfrac{|\varphi_z|+|\varphi_{\bar z}|}{|\varphi_z|-|\varphi_{\bar z}|}$ 为 $\varphi(z)$ 的伸张函数. 1983 年, Lehtinen[3] 证明了若 $h(x)$ 满足 ρ-条件, 则其 Beurling-Ahlfors 扩张的伸张函数满足不等式 $D\leqslant 2\rho$. 然而, 当 $h(x)$ 不满足 ρ-条件时, 其 Beurling-Ahlfors 扩张 $\varphi(z)$ 不再是拟共形映照, 即 D 不再有界. 1995 年, 方爱农[4] 首先利用拟对称函数 ρ 对伸张函数 D 进行估计. 陈纪修等[5] 研究了当拟对称函数 $\rho(x,t)$ 为递减函数 $\rho(t)$ 所控制时, 其伸张函数的估计为 $D\leqslant 4\rho^*+4.25$, 其中 $\rho^*=\rho(\frac{y}{2})$. 郑学良等[6-7] 将这个结果改进为如下定理.

定理 1　设实轴上保向同胚 h, 保持 ∞ 不动, 且满足条件

$$\rho^{-1}(t)\leqslant\rho(x,t)\leqslant\rho(t),\qquad x\in\mathbf{R},\quad t\in(0,\infty). \tag{1}$$

式(1)中, $\rho(t)$ 是 $(0,\infty)$ 内的递减函数. 其 Beurling-Ahlfors 扩张的伸张函数具有以下估计: 当 $\rho^*\geqslant 2$ 时, $D\leqslant 2\rho^*$; 当 $1\leqslant\rho^*<2$ 时, $D\leqslant 2\rho^*+\frac{1}{2}$. 其中, $\rho^*=\rho(\frac{y}{2})$. 本文将这个估计式改进为如下定理.

定理 2　设实轴上保向同胚 h, 保持 ∞ 不动, 且满足条件(1), 则其 Beurling-Ahlfors 扩张的伸张函数具有以下估计: 当 $\rho^*\geqslant\frac{4}{\sqrt{5}}$ 时, $D\leqslant 2\rho^*$, 当 $1\leqslant\rho^*<\frac{4}{\sqrt{5}}$ 时, $D\leqslant 2\rho^*+\frac{1}{2\rho^*}$. 其中, $\rho^*=\rho(\frac{y}{2})$.

2 记号和引理

令 $\alpha(x,t)=h(x+t)-h(x)$, $\beta(x,t)=h(x)-h(x-t)$, $A(x,t)=\dfrac{1}{t}\int_0^t\alpha(x,u)\,\mathrm{d}u$, $B(x,t)=$

收稿日期: 2007-11-23
通信作者: 王朝祥(1966-), 男, 讲师, 主要从事函数论的研究. E-mail: wchaox@hqu.edu.cn.
基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(Z0511025)

$\frac{1}{t}\int_0^t \beta(x,u)\,\mathrm{d}u$. 其中, $x\in\mathbf{R}$, $t\in\mathbf{R}^+$. 由 h 的严格单调性, 易知 $A(x,t)<\alpha(x,t)$, $B(x,t)<\beta(x,t)$. 记 $r=r(x,y)=\frac{A(x,y)}{\alpha(x,y)}$, $s=s(x,y)=\frac{B(x,y)}{\beta(x,y)}$, $\rho=\rho(x,y)=\frac{\alpha(x,y)}{\beta(x,y)}$, 则 $0<r$, $s<1$.

引理 1[6]　设 $\varphi(z)$ 是实轴上同胚 $h(x)$ 的 Beurling-Ahlfors 扩张, D 为其伸张函数, 则

$$D+\frac{1}{D}=\frac{1}{2-r-s}\left[\rho(r^2-2r+2)+\frac{1}{\rho}(s^2-2s+2)\right].$$

引理 2[6]　设 $f(r,s)=\frac{1}{2-r-s}\left[a(r^2-2r+2)+\frac{1}{a}(s^2-2s+2)\right]$, 其中 $a>0$, $0<r$, $s<1$, 则 $f(r,s)$ 是关于 r, s 的一个凸函数.

设 h 为实轴上保向同胚且保持 ∞ 不动, 令 $h^*(x)=h(x+x_0)-h(x_0)$, $x_0\in\mathbf{R}$, 则 $h^*(x)$ 也是 $\mathbf{R}$ 上保向同胚, 且 $h^*(0)=0$. 记 $\varphi^*(z)$ 为 $h^*(x)$ 的 Beurling-Ahlfors 扩张, 易验证 $D_\varphi(x_0,y)=D_{\varphi^*}(0,y)$, 估计 $D_\varphi(x_0,y)$ 只要估计 $D_{\varphi^*}(0,y)$ 即可. 为方便计, 仍用 h, φ 分别记 h^* 及 φ^*, 并且 $h(0)=0$.

引理 3[6]　设实轴上同胚 h 满足条件(1), 那么在点 $(0,y)(y>0)$ 处有

$$r+\frac{1}{2a(1+\rho^*)}s\leqslant 1-\frac{1}{2(1+\rho^*)},$$

$$\frac{a}{2(1+\rho^*)}r+s\leqslant 1-\frac{1}{2(1+\rho^*)}.$$

式中, $r=\frac{A}{\alpha}=\frac{A(0,y)}{\alpha(0,y)}$, $s=\frac{B}{\beta}=\frac{B(0,y)}{\beta(0,y)}$, $a=\rho(0,y)=\frac{\alpha(0,y)}{\beta(0,y)}$, $\rho^*=\rho\left(\frac{y}{2}\right)$.

3　定理 2 的证明

由引理 3 可知, 点 (r,s) 落在 rs 平面, 由 $r=0$, $s=0$, $r+\frac{1}{2a(1+\rho^*)}s=1-\frac{1}{2(1+\rho^*)}$, 及 $\frac{a}{2(1+\rho^*)}r+s=1-\frac{1}{2(1+\rho^*)}$ 所围成的四边形区域内. 记该区域为 F, 其顶点为 $O(0,0)$, $P\left(\frac{2\rho^*+1}{2\rho^*+2},0\right)$, $M\left(1-\frac{a+1}{a(2\rho^*+3)},1-\frac{a+1}{2\rho^*+3}\right)$, $N\left(0,\frac{2\rho^*+1}{2\rho^*+2}\right)$. F 为平面凸集, $f(r,s)$ 为凸的, $f(r,s)$ 在 F 上的最大值只能在顶点上取到. 易证, $f(r,s)$ 在 F 上的最大值在 M 点达到. 经过复杂的估计, 文[6]得到定理 1, 本文进一步来估计, 得出定理 2 的结论.

下面估计 $f(r,s)$ 在点 M 的值.

$$f_M=f\left(1-\frac{a+1}{a(2\rho^*+3)},1-\frac{a+1}{2\rho^*+3}\right)=\frac{a+a^{-1}}{a+a^{-1}+2}(2\rho^*+3)+\frac{2}{2\rho^*+3},$$

而 $\rho^{*-1}\leqslant a\leqslant\rho^*$, 因此 $\frac{a+a^{-1}}{a+a^{-1}+2}\leqslant\frac{\rho^{*2}+1}{(\rho^*+1)^2}$, 从而有

$$f_M\leqslant\frac{\rho^{*2}+1}{(\rho^*+1)^2}(2\rho^*+3)+\frac{2}{2\rho^*+3}=2\rho^*+\frac{2}{\rho^*+1}+\frac{2}{(\rho^*+1)^2}+\frac{2}{2\rho^*+3}-1.$$

以下分别就 ρ^* 的取值估计 f_M 的界限.

(1) 当 $1\leqslant\rho^*<\frac{4}{\sqrt{5}}$ 时, 记 $\rho^*=x$, 令

$$g(x)=\left(2x+\frac{1}{2x}\right)+\frac{1}{2x+\frac{1}{2x}}-\left[2x+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{2x+3}-1\right]=$$

$$\left(\frac{1}{2x}-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{2x+3}+1\right)+\left[\frac{2x}{1+4x^2}-\frac{2}{(x+1)^2}\right],\qquad x\in\left[1,\frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

记 $g_1(x)=\frac{1}{2x}-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{2x+3}+1$, $g_2(x)=\frac{2x}{1+4x^2}-\frac{2}{(x+1)^2}$, 则 $g(x)=g_1(x)+g_2(x)$ 在区间 $\left[1,\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ 内单调递增, $g(x)\geqslant g(1)=0$. 因此有

$$f_M \leqslant 2\rho^* + \frac{2}{\rho^* + 1} + \frac{2}{(\rho^* + 1)^2} + \frac{2}{2\rho^* + 3} - 1 \leqslant 2\rho^* + \frac{1}{2\rho^*} + (2\rho^* + \frac{1}{2\rho^*})^{-1}, \quad 1 \leqslant \rho^* < \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

(2) 当 $\rho^* \geqslant \frac{4}{\sqrt{5}}$时, 记 $\rho^* = x$, 令

$$p(x) = (2x + \frac{1}{2x}) - [2x + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{2x+3} - 1] =$$
$$\frac{1}{2x} - \frac{2}{x+1} + 1 - \frac{2}{(1+x)^2} - \frac{2}{2x+3}, \qquad x \in [\frac{4}{\sqrt{5}}, \infty).$$

记 $p_1(x) = \frac{1}{2x} - \frac{2}{x+1}$, $p_2(x) = 1 - \frac{2}{(1+x)^2} - \frac{2}{2x+3}$, 则 $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$, 在区间$[\frac{4}{\sqrt{5}}, \infty)$内单调递增, $p(x) \geqslant p(\frac{4}{\sqrt{5}}) > 0$. 因此有

$$f_M \leqslant 2\rho^* + \frac{2}{\rho^* + 1} + \frac{2}{(\rho^* + 1)^2} + \frac{2}{2\rho^* + 3} - 1 \leqslant 2\rho^* + \frac{1}{2\rho^*}, \qquad \rho^* \geqslant \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

综上所述, $f(r, s)$ 在区域 F 上成立. 当 $\rho^* \geqslant \frac{4}{\sqrt{5}}$时, $f(r, s) \leqslant 2\rho^* + \frac{1}{2\rho^*}$; 而当 $1 \leqslant \rho^* < \frac{4}{\sqrt{5}}$, $f(r, s) \leqslant 2\rho^* + \frac{1}{2\rho^*} + (2\rho^* + \frac{1}{2\rho^*})^{-1}$. 即得到当 $\rho^* \geqslant \frac{4}{\sqrt{5}}$时, $D \leqslant 2\rho^*$; 当 $1 \leqslant \rho^* < \frac{4}{\sqrt{5}}$时, $D \leqslant 2\rho^* + \frac{1}{2\rho^*}$. 定理证毕.

参考文献:

[1] BEURLING A, AHLFORS L. The boundary correspondence under quasiconformal mappings[J]. Acta Math, 1956, 96: 125-142.

[2] AHLFORS L V. Lectures on quasiconformal mappings[M]. Princeton: Van Nostrand, 1966.

[3] LEHTINEN M. The dilatation of Beurling-Ahlfors extension of quasisymmetric functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser AI Math, 1983, 8: 187.

[4] 方爱农. 广义 Beurling-Ahlfors 定理[J]. 中国科学, 1995, 25(6): 565-572.

[5] CHEN Ji-xiu, CHEN Zhi-guo, HE Cheng-qi. The boundary correspondence under $\mu(z)$-homeomorphisms[J]. Michigan Math J, 1996, 43: 211.

[6] 郑学良, 方爱农. 伸张函数增长阶的估计[J]. 数学进展, 2003, 32(5): 591.

[7] 郑学良, 王 洁. 关于伸张函数估计的一点注记[J]. 台州学院学报, 2004, 26(3): 1-5.

Estimates of the Dilatation Function for Beurling-Ahlfors Extension

WANG Chao-xiang

(School of Mathematics Seiences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Let h be a homeomorphism of $\mathbf{R}$ onto itself with $h(\pm\infty) = \pm\infty$, when the quasisymmetric function $\rho(x, t)$ of h is controled by a decreasing function $\rho(t)$, the dilatation function D obtained by the Beurling-Ahlfors extension of h is further estimated as follows: if $\rho^* \geqslant \frac{4}{5}$, then $D \leqslant 2\rho^*$, and if $1 \leqslant \rho^* < \frac{4}{\sqrt{5}}$, then $D \leqslant 2\rho^* + \frac{1}{2\rho^*}$, where $\rho^* = \rho(\frac{y}{2})$.

Keywords: quasiconformal mapping; Beurling-Ahlfors extension; dilatation function; quasisymmetric function

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)