文章编号: 1000-5013(2009)01-0104-04

勾股矩阵的性质及表示

宋海洲

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究勾股矩阵的性质及表示. 利用数论方法,给出勾股矩阵的数论性质;利用相关代数技巧,证明由所有的勾股矩阵构成的集合 T 是一个关于矩阵乘法的有限生成群. 同时,给出该有限生成群的一个生成元组.

关键词: 勾股数; 本原勾股数; 群; 有限生成

中图分类号: O 152.3; O 156 文献标识码: A

若整数 a, b, c 满足 $a^2+b^2=c^2$, 称 $\{a, b, c\}$ 为一组(广义)勾股数组, 如果勾股数组写成向量形式 (a, b, c), 则称该向量为一个勾股向量.

1970年, Hall[1-3] 构造了如下 3 个有趣的矩阵: $\boldsymbol{F}_1=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{F}_2=\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\2&1&2\\2&2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{F}_3=\begin{pmatrix}1&2&2\\-2&-1&-2\\2&2&3\end{pmatrix}$, 得到了如下的定理 1.

定理 1 设 $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 如上所示, (a, b, c) 是任意一个勾股向量, 即 $a^2+b^2=c^2$, 则 $(a, b, c)\boldsymbol{F}_1$, $(a, b, c)\boldsymbol{F}_2$, $(a, b, c)\boldsymbol{F}_3$ 仍然为一个勾股向量.

一般地, 一个三阶整数方阵 $\boldsymbol{A}$ 如果满足: (1) 如果 $\alpha=(a, b, c)$ 是任意的一个勾股向量, 那么 $\beta=(a, b, c)\boldsymbol{A}$ 仍然是一个勾股向量; (2) $|\boldsymbol{A}|^2=1$. 则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 为一个勾股矩阵.

容易验证定理 1 的 3 个勾股矩阵 $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 的行列式都等于 1, 也就是说, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 都是勾股矩阵. 记 T 是所有勾股矩阵构成的集合, 即 $T=\{\boldsymbol{F}|\boldsymbol{F}\in Z^{3\times 3}, \boldsymbol{F}$ 是勾股数矩阵$\}$. 则 $\boldsymbol{F}_1\in T$, $\boldsymbol{F}_2\in T$, $\boldsymbol{F}_3\in T$. 牛普选在文[4]中给出如下的定理 2.

定理 2 T 关于矩阵乘法构成一个群.

本文对勾股矩阵作进一步研究, 得到了勾股矩阵的一些性质.

1 一些引理

定义 1 若 a, b, c 满足 $a^2+b^2=c^2$, 且 a, b, c 互素, 称 $\{a, b, c\}$ 为一组本原勾股数组[5], 对应的向量为一个本原勾股向量. 显然, 有如下的引理 1 和引理 2 .

引理 1 如果 $\alpha=(a, b, c)$ 是任意的一个本原勾股向量, 那么 a, b 之中有一个是奇数, 另一个是偶数, 而 c 必是奇数.

引理 2 一个三阶整数方阵 $\boldsymbol{A}\in T$ 的充要条件是 T 满足: (1) 如果 $\alpha=(a, b, c)$ 是任意的一个本原勾股向量, 那么 $\beta=(a, b, c)A$ 仍然是一个本原勾股向量; (2) $|\boldsymbol{A}|^2=1$.

引理 3[4] 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, 那么三阶整数方阵 $\boldsymbol{A}\in T$ 的充要条件是 $\boldsymbol{ABA}'=\boldsymbol{B}$.

收稿日期: 2007-10-21

通信作者: 宋海洲(1971-), 男, 副教授, 主要从事数学模型的研究. E-mail: hzsong@hqu.edu.cn.

引理 4[4]　$A\in T$ 的充要条件是 $A'\in T$. 由引理 3 容易推得引理 5 成立.

引理 5　设 $A=(a_{i,j})\in Z^{3\times3}$, 则 $A\in T$ 的充要条件是 $a_{i,j}$ 满足下面的方程组的整数解

$$a_{1,1}^2+a_{2,1}^2-a_{3,1}^2=1, \tag{1}$$

$$a_{1,2}^2+a_{2,2}^2-a_{3,2}^2=1, \tag{2}$$

$$-a_{1,3}^2-a_{2,3}^2+a_{3,3}^2=1, \tag{3}$$

$$a_{1,1}a_{1,2}+a_{2,1}a_{2,2}=a_{3,1}a_{3,2}, \tag{4}$$

$$a_{1,1}a_{1,3}+a_{2,1}a_{2,3}=a_{3,1}a_{3,3}, \tag{5}$$

$$a_{1,2}a_{1,3}+a_{2,2}a_{2,3}=a_{3,2}a_{3,3}. \tag{6}$$

2　勾股矩阵的性质

记 G 是所有满足下列两个条件的三阶整数方阵 A 的集合: (1) $A\in T$; (2) 如果任意一个 b 是偶数的本原勾股向量 $\alpha=(a,b,c)$, 那么 $(a',b',c')=(a,b,c)A$ 仍然是一个本原勾股向量, 而且 b' 是偶数. 显然有 $G\subset T$.

为了方便, 引入一些记号. 记 $G_t=\{A\mid A=(a_{i,j})\in Z^{3\times3}$, 且 $A\in G$, 且 $\max\limits_{i,j}|a_{i,j}|=t\}$, 记 $D_1=\mathrm{diag}[1,1,1]^*$, $D_2=\mathrm{diag}[-1,1,1]$, $D_3=\mathrm{diag}[1,-1,1]$, $D_4=\mathrm{diag}[1,1,-1]$, $D_5=\mathrm{diag}[-1,-1,1]$, $D_6=\mathrm{diag}[-1,1,-1]$, $D_7=\mathrm{diag}[1,-1,-1]$, $D_8=\mathrm{diag}[-1,-1,-1]$, $\mathrm{diag}[a_1,a_2,a_3]$ 表示以 a_1,a_2,a_3 为对角线元素的对角矩阵.

记 $F_4=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\-2&-2&-3\end{pmatrix}$, $D_9=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. $L(A_1,\cdots,A_n)$ 表示由矩阵 $A_1,\cdots,A_n$ 生成的关于矩阵乘法的有限生成群.

定理 3　设 $A=(a_{i,j})\in Z^{3\times3}$, 且 $A\in G$, 那么 $|a_{3,3}|=\max\limits_{i,j}|a_{i,j}|$.

证明　由于 $G\subset T$, 而 $A\in G$, 所以 $A\in T$. 由引理 5 可知, 等式 (1) ~ (6) 成立. 由等式 (3) 可得

$$|a_{3,3}|\geqslant|a_{3,1}|,\qquad |a_{3,3}|\geqslant|a_{2,3}|,\qquad |a_{3,3}|\geqslant1. \tag{7}$$

又由 $A\in T$ 可得 $A'\in T$, 所以

$$|a_{3,3}|\geqslant|a_{3,1}|,\qquad |a_{3,3}|\geqslant|a_{3,2}|. \tag{8}$$

当 $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $a_{2,2}$ 都不等于 0 时, 则由式 (1) 可得

$$|a_{3,1}|\geqslant|a_{1,1}|,\qquad |a_{3,1}|\geqslant|a_{2,1}|. \tag{9}$$

而由式 (2) 可得

$$|a_{3,2}|\geqslant|a_{1,2}|,\qquad |a_{3,2}|\geqslant|a_{2,2}|. \tag{10}$$

因此, 由式 (7), (8), (9) 和式 (10) 可得, $|a_{3,3}|=\max\limits_{i,j}|a_{i,j}|$ 成立. 当 $a_{1,1}$, $a_{2,1}$ 中至少一个等于 0 而 $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ 都不等于 0 时, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ 都不等于 0. 由式 (2) 可推出不等式 (10) 成立; 而 $a_{1,1}$, $a_{2,1}$ 中至少一个等于 0, 可推出 $\max\limits_i|a_{i,1}|=1$; $|a_{3,3}|\geqslant1$, 此时必有 $|a_{3,3}|\geqslant\max\limits_i|a_{i,1}|$. 由式 (7), (8), (10) 和 $|a_{3,3}|\geqslant\max\limits_i|a_{i,1}|$, 可得 $|a_{3,3}|=\max\limits_{i,j}|a_{i,j}|$ 成立.

当 $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ 中至少一个等于 0 而 $a_{1,1}$, $a_{2,1}$ 都不等于 0 时, $a_{1,1}$, $a_{2,1}$ 都不等于 0, 由式 (1) 可推出不等式 (9) 成立; 在 $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ 中至少一个等于 0, 可推出 $\max\limits_i|a_{i,2}|=1$, 而 $|a_{3,3}|\geqslant1$. 此时必有 $|a_{3,3}|\geqslant\max\limits_i|a_{i,2}|$. 由不等式 (7), (8), (9) 和 $|a_{3,3}|\geqslant\max\limits_i|a_{i,2}|$ 可得, $|a_{3,3}|=\max\limits_{i,j}|a_{i,j}|$ 成立.

当 $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ 中至少一个等于 0 并且 $a_{1,1}$, $a_{2,1}$ 中至少一个等于 0 时, $a_{1,1}$, $a_{2,1}$ 中至少一个等于 0, 可以推出 $\max\limits_i|a_{i,1}|=1$, 而 $|a_{3,3}|\geqslant1$. 此时, 必有 $|a_{3,3}|\geqslant\max\limits_i|a_{i,1}|$. 在 $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ 中至少一个等于 0, 可推出 $\max\limits_i|a_{i,2}|=1$, 而 $|a_{3,3}|\geqslant1$. 此时, 必有 $|a_{3,3}|\geqslant\max\limits_i|a_{i,2}|$. 由不等式 (7), $|a_{3,3}|\geqslant\max\limits_i|a_{i,1}|$ 和 $|a_{3,3}|\geqslant\max\limits_i|a_{i,2}|$ 可得, $|a_{3,3}|=\max\limits_{i,j}|a_{i,j}|$ 成立.

定理 4　设 $A=(a_{i,j})\in Z^{3\times3}$, 且 $A\in G$, 那么有 $a_{i,i}\equiv1\pmod 2$ $(i=1,2,3)$, $a_{i,j}\equiv0\pmod 2$ $(i\neq j$, $i=1,2,3$; $j=1,2,3)$.

证明　由 $A\in G$ 可知, 上面的等式(1)~(3)成立. 由 $-a_{1,3}^2-a_{2,3}^2+a_{3,3}^2=1$ 可得, $a_{3,3}\equiv 1(\bmod 2)$, $a_{1,3}\equiv 0(\bmod 2)$, $a_{2,3}\equiv 0(\bmod 2)$. 又 $A\in T$ 可得 $A'\in T$, 因此 $a_{3,1}\equiv 0(\bmod 2)$, $a_{3,2}\equiv 0(\bmod 2)$. 设 $\alpha=(a,b,c)$ 是任意一个偶数的本原勾股向量, 由引理1可得 a, c 是奇数; 由于 $A\in G$, 所以 $(a',b',c')=(a,b,c)A$ 仍然是一个本原勾股向量, 而且 b' 是偶数, 由引理1可得 a', c' 是奇数; 由 b 是偶数, $a_{3,1}\equiv 0(\bmod 2)$ 和 a 是奇数, 以及 $a'=aa_{1,1}+ba_{2,1}+ca_{3,1}$, 可得 $a_{1,1}\equiv 1(\bmod 2)$. 由 $a_{1,1}\equiv 1(\bmod 2)$, $a_{3,1}\equiv 0(\bmod 2)$ 及等式(1), 可得 $a_{2,1}\equiv 0(\bmod 2)$. 由 a 是奇数, b 是偶数, $a_{3,2}\equiv 0(\bmod 2)$, 以及 $b'=aa_{1,2}+ba_{2,2}+ca_{3,2}$, 可得 $a_{1,2}\equiv 0(\bmod 2)$. 由 $a_{1,2}\equiv 0(\bmod 2)$, $a_{3,2}\equiv 0(\bmod 2)$ 及等式(2), 可得 $a_{2,2}\equiv 1(\bmod 2)$. 综上所述, 有 $a_{i,i}\equiv 1(\bmod 2)(i=1,2,3)$, $a_{i,j}\equiv 0(\bmod 2)(i\neq j, i=1,2,3, j=1,2,3)$ 成立.

推论1　(1) G 关于矩阵乘法构成一个群[6]; (2) G 是 T 的一个子群. 证明从略.

3　G_1 和 G_3 的表示

定理5　$G_1=\{D_1,\cdots,D_8\}$.

证明　利用定理3和定理4, 易证定理5成立.

定理6　设 $A=(a_{i,j})\in Z^{3\times 3}$, $A\in G$, $\max\limits_{i,j}|a_{i,j}|=3$, 则 $|a_{3,3}|=3$, $|a_{3,1}|=|a_{3,2}|=|a_{1,3}|=|a_{2,3}|=|a_{1,2}|=|a_{2,2}|=2$, $|a_{1,1}|=|a_{2,2}|=1$.

证明　利用定理4, 可证定理6成立.

定理7　记 $G_3=\{A|A=(a_{i,j})\in Z^{3\times 3}$, 而且 $A\in G$, $\max\limits_{i,j}|a_{i,j}|=3\}$, 则有 $G_3=\{A|A=D_iF_1D_j, D_i\in G_1, D_j\in G_1\}$.

证明　任意的 $D_i(i=1,\cdots,8)$ 和 $D_j(j=1,\cdots,8)$, 由定理5得 $D_i\in G$, $D_j\in G$, 容易验证 $F_1\in G$. 由推论1(1)可推得, $D_iF_1D_j\in G$, 又容易验证矩阵 $D_iF_1D_j$ 元素的绝对值最大等于3. 所以, 对任意的 $D_i(i=1,\cdots,8)$ 和 $D_j(j=1,\cdots,8)$, $D_iF_1D_j\in G_3$. 另外, 对于任意 $A=(a_{i,j})\in G_3$, 由定理6可以得到, $|a_{3,3}|=3$, $|a_{1,1}|=|a_{2,2}|=1$, $|a_{3,1}|=|a_{3,2}|=|a_{1,3}|=|a_{2,3}|=|a_{1,2}|=|a_{2,1}|=2$.

对于 A, 一定存在 D_i 和 D_j, 使得矩阵 D_iAD_j (记矩阵 D_iAD_j 为 C, 并设 $C=(c_{i,j})$) 的第1, 2列6个元素中最多有两个元素小于0, 而且这些小于0的元素不在同一行. 由于 D_i, D_j 和 A 都属于 G, 所以 $C=D_iAD_j\in G$, 从而有 $C\in G_3$, $|c_{3,3}|=3$, $|c_{3,1}|=|c_{3,2}|=|c_{1,3}|=|c_{2,3}|=|c_{1,2}|=|c_{2,1}|=2$, $|c_{1,1}|=|c_{2,2}|=1$. 由 $C\in G$ 及引理5得, $c_{1,1}c_{1,2}+c_{2,1}c_{2,2}=c_{3,1}c_{3,2}$, 又 C 的第1, 2列6个元素中最多有两个元素小于0, 而且这些小于0元素不在同一行, 可得 $c_{i,j}>0(i=1,2,3, j=1,2)$.

对于 C, 一定存在 D_k, 使得矩阵 CD_k (记矩阵 CD_k 为 H, 并设 $H=(h_{i,j})$) 的第1, 2列向量与 C 的第1, 2列向量相同, 并且 H 的第3列向量最多有1个元素小于0. 同样, 可以得到 $|h_{3,3}|=3$, $|h_{3,1}|=|h_{3,2}|=|h_{1,3}|=|h_{2,3}|=|h_{1,2}|=|h_{2,1}|=2$, $|h_{1,1}|=|h_{2,2}|=1$, 及 $h_{1,1}h_{1,3}+h_{2,1}h_{3,1}=h_{3,1}h_{3,3}$. 注意到 $h_{i,1}=c_{i,1}>0(i=1,2,3)$, 所以 $h_{i,3}>0(i=1,2,3)$. 从而 $H=F_1$.

所以存在 D_i、D_j 和 D_k 使得 $D_iAD_jD_k=F_1$. 令 $P_1=D_i^{-1}$, $P_2=(D_jD_k)^{-1}$, 容易验证 P_1 和 P_2 都属于 G_1, 而 $A=P_1F_1P_2$.

综上所述, $G_3=\{A|D_iF_1D_j, D_i\in G_1, D_j\in G_1\}$, 直接验证就可以得到如下的定理8.

定理8　$D_1=F_1\cdot F_1^{-1}$, $D_2=F_1\cdot F_2^{-1}$, $D_3=F_1\cdot F_3^{-1}$, $D_4=F_1\cdot F_4^{-1}$, $D_5=F_2\cdot F_3^{-1}$, $D_6=F_2\cdot F_4^{-1}$, $D_7=F_3\cdot F_4^{-1}$, $D_8=F_2\cdot F_3^{-1}\cdot F_1\cdot F_4^{-1}$. 由定理7及定理8, 可以得到

定理9　(1) $G_3\subset L(F_1,F_2,F_3,F_4)$; (2) $G_1\subset L(F_1,F_2,F_3,F_4)$.

4　G 和 T 的表示

定理10　任意 $A=(a_{i,j})\in G$, 设 A 的元素的绝对值最大值为 y, 并且 $y>3$, 记 $H_i=AF_i(i=1,\cdots,4)$, 则一定存在一个 H_i, 它的元素的绝对值最大值小于 y.

证明　由于 $F_i(i=1,\cdots,4)\in G$, $A\in G$, 所以 $H_i=AF_i\in G(i=1,\cdots,4)$. 由定理3可知, A 的元素的绝对值最大值 $y=|a_{3,3}|$, H_1 的元素的绝对值最大值为 $|2a_{3,1}+2a_{3,2}+3a_{3,3}|$, H_2 的元素的绝对值最大值为 $|-2a_{3,1}+2a_{3,2}+3a_{3,3}|$, H_3 的元素的绝对值最大值为 $|2a_{3,1}-2a_{3,2}+3a_{3,3}|$, H_4 的元素的绝对值最

大值为$|2a_{3,1}+2a_{3,2}-3a_{3,3}|$.

先考虑$a_{3,1}\geqslant 0$, $a_{3,2}\geqslant 0$, $a_{3,3}>0$的情形. 由$\boldsymbol{A}\in G$可得$\boldsymbol{A}'\in G$, 所以$-a_{3,1}^2-a_{3,2}^2+a_{3,3}^2=1$成立. 由于$|a_{3,3}|>3$, 必有$a_{3,1}>0$, $a_{3,2}>0$, 则$a_{3,3}>a_{3,1}$, $a_{3,3}>a_{3,2}$, $2a_{3,1}+2a_{3,2}-3a_{3,3}<a_{3,3}$成立. 由$-a_{3,1}^2-a_{3,2}^2+a_{3,3}^2=1$可得, $a_{3,3}-a_{3,1}=(1+a_{3,2}^2)/(a_{3,3}+a_{3,1})$, 而$(1+a_{3,2}^2)/(a_{3,3}+a_{3,1})<(a_{3,2}a_{3,1}+a_{3,2}a_{3,3})/(a_{3,3}+a_{3,1})=a_{3,2}$, 从而有$a_{3,3}-a_{3,1}<a_{3,2}$, 即$a_{3,3}<a_{3,2}+a_{3,1}$, 因此$-a_{3,3}<2a_{3,1}+2a_{3,2}-3a_{3,3}$成立. 由$2a_{3,1}+2a_{3,2}-3a_{3,3}<a_{3,3}$和$-a_{3,3}<2a_{3,1}+2a_{3,2}-3a_{3,3}$可得, $|2a_{3,1}+2a_{3,2}-3a_{3,3}|<|a_{3,3}|$成立. 即$\boldsymbol{H}_4$的元素的绝对值最大值小于$y$. 此时, 定理 10 成立.

同理可以证明, 在$a_{3,1}\geqslant 0$, $a_{3,2}\leqslant 0$, $a_{3,3}>0$等情形下, 定理 10 仍然成立.

定理 11 $G=L(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4)$, 也就是说$G$是有限生成群.

证明 显然, $L(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4)\subset G$.

设任意$\boldsymbol{A}=(a_{i,j})\in G$, 如$|a_{3,3}|\leqslant 3$, 则由定理 4 可知, $|a_{3,3}|=1$, 或者$|a_{3,3}|=3$. 当$|a_{3,3}|=1$时, 有$\boldsymbol{A}\in G_1$, 由定理 9 有$\boldsymbol{A}\in L(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4)$. 当$|a_{3,3}|=3$时, 有$\boldsymbol{A}\in G_3$, 由定理 9 有$\boldsymbol{A}\in L(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4)$. 若$|a_{3,3}|>3$, 则由定理 10 可知, 存在$\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_k$(其中$\boldsymbol{P}_i\in\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4\}$), 使得$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2\times\cdots\times\boldsymbol{P}_k$的元素的绝对值最大值$\leqslant 3$. 从而有$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2\times\cdots\times\boldsymbol{P}_k$, 或者属于$G_1$, 或者属于$G_3$, 由定理 9 可知$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2\times\cdots\times\boldsymbol{P}_k\in L(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4)$, 从而$\boldsymbol{A}\in L(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4)$. 于是有$G\subset L(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4)$.

综上所述, 有$G=L(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4)$.

推论 2 (1) $G=L(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{D}_3, \boldsymbol{D}_4)$; (2) $G=L(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{D}_4, \boldsymbol{D}_5)$; (3) $G=L(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{D}_3, \boldsymbol{D}_4)$.

定义 2 设$\boldsymbol{H}$是有限生成群, $X_1, X_2, \cdots, X_n$满足$\boldsymbol{H}=L(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 称$X_1, X_2, \cdots, X_n$为$\boldsymbol{H}$的 1 个生成元组. 若$X_1, X_2, \cdots, X_n$是$\boldsymbol{H}$的 1 个生成元组, 且是元素最少的 1 个生成元组, 称$X_1, X_2, \cdots, X_n$为$\boldsymbol{H}$的 1 个极小生成元组, n称为H基数, 并记$n=d(\boldsymbol{H})$.

定理 12 $T=L(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{D}_4, \boldsymbol{D}_9)$. 也就是说$T$是有限生成群, 而$\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{D}_4, \boldsymbol{D}_9$是的 1 个生成元组, 且$d(T)=4$.

推论 3 $T=L(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{D}_4, \boldsymbol{D}_9)=L(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{D}_3, \boldsymbol{D}_4, \boldsymbol{D}_9)=L(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_4, \boldsymbol{D}_9)=L(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4, \boldsymbol{D}_9)=L(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4, \boldsymbol{D}_9)$.

参考文献:

[1] PHYLLIS L. 产生勾股数组的矩阵方法[J]. 顾海润, 译. 数学通讯, 1988(5): 43.

[2] 李旭东, 智海章. 勾股数组生成矩阵的发现探索[J]. 广西右江民族师专学报, 2004(6): 4-6.

[3] 李淑敏, 王炳安. 关于勾股数的矩阵生成法[J]. 大连大学学报, 1996, 6(4): 347-350.

[4] 牛普选. 勾股数组与矩阵[J]. 南都学坛, 1998, 18(6): 27-30.

[5] 冯岳翔. 奇妙的勾股数组[J]. 商洛师范专科学校学报, 1996, 7(1): 48-49.

[6] 宋海洲. 关于合同变换矩阵的一般形式[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2004, 25(2): 131-132.

The Property and the Representation of Pythagorean Number Matrixes

SONG Hai-zhou

(School of Mathematics Sciences, Huaoqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: This paper discusses the property and the representation of pythagorean number matrixes. By applying number theoretic method, we obtain some number theoretic properties of pythagorean number matrixes. Furthermore by some skills of algebra, it is proved that the set of all pythagorean number matrixes is a finitely generated group, and a set of generators of the finitely generated group is given.

Keywords: pythagorean number; primitive pythagorean number; group; genarator

(责任编辑: 钱 筠 英文审校: 张金顺, 黄心中)