第 30 卷　第 1 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 30　No. 1
2009 年 1 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jan. 2009

文章编号:　1000-5013(2009)01-0100-04

一类 Sierpinski 块的 Hausdorff 测度

陈应生

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要:　讨论压缩比为 0.25 的 Sierpinski 方块 E, 其 Hausdorff 维数 $s=1.5>1$. 利用部分覆盖原理与质量分布原理,证明 $2.110\,654\,68 \leqslant H^s(E) \leqslant 2.191\,500\,00$.

关键词:　Sierpinski 方块; Hausdorff 测度; 覆盖; 质量分布

中图分类号:　O 174.12　　　文献标识码:　A

计算自相似集的 Hausdorff 测度是相当困难的,即使是满足强开集条件的自相似集,其 Hausdorff 测度也是困难的. 迄今为止, 尚无 Hausdorff 维数大于 1 的分形集的 Hausdorff 测度的精确值被算出来, 文[1]给出了压缩比为 0.25 的 Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度等于$\sqrt{2}$, 文[2-3]较好地估计了三分 Cantor 集自乘积的 Hausdorff 测度, 该分形集的 Hausdorff 维数大于 1. 本文讨论压缩比为 0.25 的 Sierpinski 方块的 Hausdorff 测度.

1　Sierpinski 块的构造

在空间 R^3 取单位正方体 E_0, 在 E_0 的 8 个角上保留 8 个边长为 0.25 的小正方体并删去其余部分, 得到 8 个边长为 0.25 的小正方体的集合, 记为 E_1, 如图 1 所示. 对 E_1 中的每个正方体重复上述过程, 得到集合记为 E_2. 无限重复上述过程, 得到 $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$, 非空集合 $E=\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$ 是压缩比为 0.25 的 Sierpinski 块, 易得 E 的 Hausdorff 维数 $s=\dim_H(E)=1.5$.

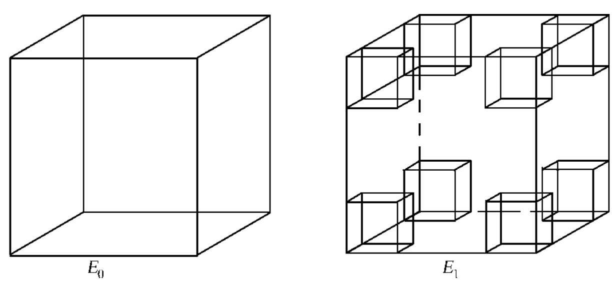

图 1　Sierpinski 方块的构造

Fig. 1　The construction of sierpinski block

对于 $n \geqslant 0$, E_n 由 8^n 个边长为$\frac{1}{4^n}$的正方体组成, 每个这样的正方体称为基本正方体, 记为 J_n. 在 E 上定义分布函数 μ, 满足 $\mu(E_0)=\sqrt{3}^s$, $\mu(J_n)=\frac{1}{8^n}\sqrt{3}^s$, $\mu(E_0-E)=0$, 则 μ 为 E 上一个质量分布, 其中, $n=0, 1, 2, \cdots$, 如图 2 所示, 设平面 G 为垂直于 E_0 的对角线, $B'D$ 为 E_0 的一条对角线, 记顶点 B' 到 G 的距离为 g, 平面 $B'A'C'$, $B'BC$, $B'BA$ 与平面 G 所围成的四面体记为 Δ_g, 如图 1 所示.

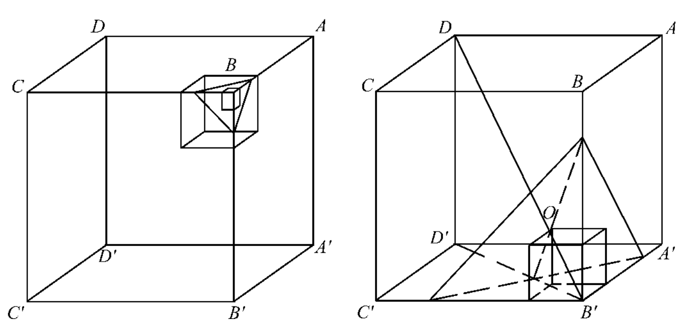

图 2　Sierpinski 块的计算

Fig. 2　The computation of sierpinski block

收稿日期:　2007-11-19

通信作者:　陈应生(1976-), 男, 讲师, 主要从事分形几何与拓扑动力系统的研究. E-mail: cyssheng@hqu.edu.cn.

2　Sierpinski 块的计算

定理 1　E 的 Hausdorff 测度[4] 满足 $H^s(E) \leqslant 2.19150000$.

证明　在 BC 边上取以 B 为顶点, 以长度为 $x=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^5}\right)$ 的线段, 在 BA, BB' 上也取以 B 为顶点, 长度为 x 的线段, 则可得一个四面体, 如图 2 所示. 在 E_0 的 8 个顶点上作同样的正方体, 则可得中间的 1 个十六面体, 记为 U. 容易算得其直径 $|U|=\sqrt{2+(1-2x)^2}$, $\delta=\{U, 8$ 个 $J_2, 8\times 3$ 个 $J_4, 8\times 3^2$ 个 $J_6\}$ 构成 E 的一个覆盖.

$$H^s(E) \leqslant |U|^s+8\left(\frac{1}{8^2}+\frac{3}{8^4}+\frac{3^2}{8^4}\right)H^s(E),$$

$$H^s(E) \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{8}-\frac{3}{8^3}-\frac{9}{8^5}}\sqrt{2+\left(1-2\times\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^5}\right)\right)^2}^{\,s} \approx 2.1915.$$

引理 1　$\mu(\Delta) \geqslant 0.9457g^s$, $0<g \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$.

证明　因为 $0<g \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$, 所以存在自然数使得 $\frac{\sqrt{3}}{4^{k+1}}<g \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4^k}$, 从而 $\frac{\sqrt{3}}{4}<4^k g \leqslant \sqrt{3}$, 容易得 $\frac{\mu(\Delta_{4^k g})}{(4^k g)^s}=\frac{8^k\mu(\Delta_g)}{8^k g^s}=\frac{\mu(\Delta_g)}{g^s}$. 因此只须证明, 当 $\frac{\sqrt{3}}{4}<g \leqslant \sqrt{3}$ 时引理正确即可. 任取自然数 n, 将 OD 分成 3×4^n 等分, 分点记为 $D_1, D_2, D_3, \cdots, D_{3\times 4^n}, D_{3\times 4^n+1}=D$ (图 2). 易知 $|D_iD_{i+1}|=\frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}}$ $(i=1, 2, \cdots, 3\times 4^n)$. 记

$$g_{i,n}=|OD_i|=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{(i-1)\sqrt{3}}{4^{n+1}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{i-1}{4^n}\right),\qquad i=1, 2, \cdots, 3\times 4^n.$$

由于 $\frac{\sqrt{3}}{4}<g \leqslant \sqrt{3}$, 故存在 $i\in\{1, 2, \cdots, 3\times 4^n\}$, 使得 $g_{i,n}<g \leqslant g_{i+1,n}$, 从而有

$$g^s \leqslant g^s_{i+1,n}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^s\left(1+\frac{i}{4^n}\right)^s=\frac{\sqrt{3}^s}{8}\left(\frac{4^n+i}{4^n}\right)^s,$$

$$\mu(\Delta_g) \geqslant \frac{\sqrt{3}^s}{8}+\frac{l_n^i\sqrt{3}^s}{8^{n+1}}=\frac{\sqrt{3}^s}{8}\left(\frac{8^n+l_n^i}{8^n}\right),$$

则 $\frac{\mu(\Delta_g)}{g^s} \geqslant \frac{8^n+l_n^i}{(4^n+i)^s}$. 其中, G_i 为过点 D_i 且垂直于对角线 $B'D$ 的平面, l_n^i 表示夹在平面 G_0 与平面 G_i 之间的 $\frac{1}{4^{n+1}}$ 正方体 E_{n+1} 的个数; $n=1$, $l_n^1=0$, $l_n^2=3$, $l_n^3=12$, $l_n^4=21$, $l_n^5=24$, $l_n^6=27$, $l_n^7=36$, $l_n^8=45$, $l_n^9=48$, $l_n^{10}=49$, $l_n^{11}=52$, $l_n^{12}=55$, $l_n^{13}=56$. 记 $h(n, i)=\frac{8^n+l_n^i}{(4^n+i)^s}$, 则

$$\inf_{\frac{\sqrt{3}}{4}<g \leqslant \sqrt{3}}\frac{\mu(\Delta_g)}{g^s}>h(n)=\min_{1\leqslant i\leqslant 3\times 4^n}\{h(n, i)\}.$$

$$\frac{\mu(\Delta_g)}{g^s} \geqslant h(n, i),\qquad g_{i,n}<g \leqslant g_{i+1,n},\qquad i=1, 2, \cdots, 3\times 4^n.$$

对任意自然数 n, 当 $n=1$ 时, 易算得 $h(1)\approx 0.7155$, 即其递推公式为

$$l_{n+1}^{4i-2}-l_{n+1}^{4i-3}=l_n^{i+1}-l_n^i,\qquad l_{n+1}^{4i-1}-l_{n+1}^{4i-3}=4(l_n^{i+1}-l_n^i),$$

$$l_{n+1}^{4i}-l_{n+1}^{4i-3}=7(l_n^{i+1}-l_n^i),\qquad l_{n+1}^{4i+1}-l_{n+1}^{4i-3}=8(l_n^{i+1}-l_n^i).$$

其中, $i=1, 2, \cdots, 3\times 4^n$; $n=1, 2, \cdots$. 通过上面的递推公式和数值计算, 可得到 $h(2)\approx 0.8773$, $h(3)\approx 0.9305$, $h(4)\approx 0.9457$, 所以有 $\mu(\Delta_g) \geqslant 0.9457g^s$, $0<g \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$. 引理得证.

引理 2　对于任意的可测集合 V: $\mu(V) \leqslant 1.08|V|^s$

证明　记 $k=0.9457$, 不妨设 $V\subset E$; 否则, 用 $V\cap E_0$ 代替, 如图 3 所示.

(1) 若 V 与 E_1 中的 8 个基本正方体相交. H_1 为垂直于对角线 $B'D$ 的 V 的切平面, H_1 与平面 $B'BA$, $B'C'A$, $B'BC$ 所围的四面体记为 Δ_{g_1}, B' 到 H_1 的距离记为 g_1, 在其他 7 个顶点上作同样的切平面 H_i, 所围成的四面体记为 Δ_{g_i}, 顶点到 H_i 的距离记为 $g_i(i=1,2,\cdots,8)$(图 3). 由引理 2 有

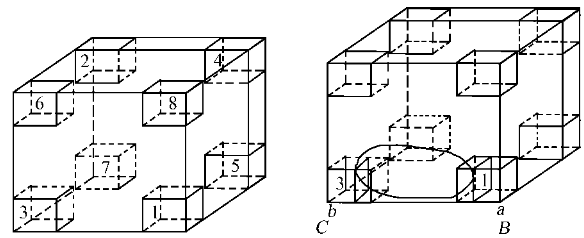

图 3 Sierpinski 块的测度估计

Fig.3 The estimation of measure for Sierpinski

$$|V|\geqslant\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}g_i^s,$$

$$\mu(V)\leqslant\sqrt{3}^s-\sum_{i=1}^{8}\mu(\Delta_{g_i})\leqslant\sqrt{3}^s-k\sum_{i=1}^{8}g_i^s.$$

令 $f(g_1,\cdots,g_8)=1.08(\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{8}g_i)^s+k\sum_{i=1}^{8}g_i^s-\sqrt{3}^s\ (0\leqslant g_i\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4})$, 得 $f'_{g_i}=-0.27s(\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{8}g_i)^{s-1}+ksg_i^{s-1}$, 驻点 $g_i^0=0.1214(i=1,2,\cdots,8)$. 令 $D_1=\{(g_1,\cdots,g_8),0\leqslant\sum_{i=1}^{8}g_k\leqslant2\sqrt{3}\}$, 容易证明 f 在 D_1 上的最小值大于零, 因此, $1.08|V|^s-\mu(V)\geqslant f(g_1,\cdots,g_8)>0$.

(2) 若 V 与 E_1 中的 7 个基本正方体相交, 不失一般性, 有 $|V|\geqslant\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6}g_i$, $\mu(V)\leqslant\frac{7}{8}\sqrt{3}^s-k\sum_{i=1}^{6}g_i^s$, 令 $f(g_1,\cdots,g_7)=1.08(\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6}g_i)^s+k\sum_{i=1}^{6}g_i^s-\frac{7}{8}\sqrt{3}^s$, $D_2=\{(g_1,\cdots,g_6),0\leqslant\sum_{i=1}^{6}g_i\leqslant1.5\sqrt{3}\}$. 同理可得, 在 D_2 上 $f>0$. 从而 $\mu(V)\leqslant1.08|V|^s$.

(3) 若 V 与 E_1 中 6 个基本正方体相交, 都有 E_1 对角面上的 4 个正方体与之相交. 不妨设为 1, 2, 3, 4 这 4 个正方体, $|V|\geqslant\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}g_i$, $\mu(V)\leqslant0.75\sqrt{3}^s-k\sum_{i=1}^{6}g_i^s\leqslant0.75-k\sum_{i=1}^{4}g_i^s$. 如令 $f(g_1,\cdots,g_4)=1.08(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}g_i)^s+k\sum_{i=1}^{4}g_i^s-\frac{3}{4}\sqrt{3}^s$, 则同理易证, $\mu(V)\leqslant1.08|V|^s$.

(4) 若 V 与 E_1 的 5 个基本正方体相交. 如果 1, 2, 3, 5, 7 这 5 个基本正方体与 V 相交, 则有 $|V|\geqslant\sqrt{3}-(g_1+g_2)$, $|V|\geqslant\sqrt{2}-\sqrt{\frac{2}{3}}(g_3+g_5)$, $|V|\geqslant\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}(g_1+g_2+\sqrt{\frac{2}{3}}(g_3+g_5))$. 因此有 $\mu(V)\leqslant\frac{5}{8}\sqrt{3}^s-k(g_1^s+g_2^s+g_3^s+g_5^s+g_7^s)$, $\mu(V)\leqslant\frac{5}{8}\sqrt{3}^s-k(g_1^s+g_2^s+g_3^s+g_5^s)$, $f(g_1,g_2,g_3,g_5)=1.08\{\sqrt{3}-\frac{1}{2}[g_1+g_2+\sqrt{\frac{2}{3}}(g_3+g_5)]\}^s+k(g_1^s+g_2^s+g_3^s+g_4^s)-\frac{5}{8}\sqrt{3}^s$, $D_4=\{(g_1,g_2,g_3,g_5),0\leqslant(g_1^s+g_2^s+g_3^s+g_5^s)\leqslant\sqrt{3}\}$. 同理易得, $\mu(V)\leqslant1.08|V|^s$. 如果 1, 2, 3, 4, 5 这 5 个基本正方体与 V 相交, 则有 $|V|\geqslant\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}g_i$, $\mu(V)\leqslant\frac{5}{8}\sqrt{3}^s-k\sum_{i=1}^{4}g_i^s$ 令 $f(g_1,g_2,g_3,g_4)=1.08(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}g_i)^s+k\sum_{i=1}^{4}g_i^s-\frac{5}{8}\sqrt{3}^s$. 同样方法可证, $1.08|V|^s-\mu(V)\geqslant0$.

(5) 若 V 与 E_1 的 4 个基本正方体相交. (a) 若 V 与 E_1 的对顶角上的正方体相交, 如 1, 2 这两个正方体相交, 则 $|V|\geqslant\sqrt{3}-g_1-g_2$, $\mu(V)\leqslant0.5\sqrt{3}^s-k\sum_{i=1}^{4}g_i^s\leqslant0.5\sqrt{3}^s-k\sum_{i=1}^{2}g_i^s$, $f(g_1,g_2)=1.08(\sqrt{3}-g_1-g_2)^s+k\sum_{i=1}^{2}g_i^s-0.5\sqrt{3}^s$; 同样易证, $\mu(V)\leqslant1.08|V|^s$. (b) 若 V 与 E_1 的 1, 3, 5, 7 这 4 个基本正方体相交, 则有 $|V|\geqslant\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}(g_1+g_3+g_5+g_7)$, $\mu(V)\leqslant0.5\sqrt{3}^s-k(g_1^s+g_3^s+g_5^s+g_7^s)$. 同样易证, $1.08|V|^s-\mu(V)\geqslant f>0$.

(6) 若 V 与 E_1 的 3 个基本正方体相交. (a) 若 V 与 E_1 的对角上的基本正方体相交, 不妨设 V 与 1, 2 相交, 则有 $|V|\geqslant\sqrt{3}-g_1-g_2\ |V|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mu(V)\leqslant\frac{3}{8}\sqrt{3}^s$. 同样易证, $\mu(V)\leqslant1.08|V|^s$. (b) 若 V 与 E_1 的 1, 3 这两个基本正方体相交, 则有 $|V|\geqslant\sqrt{2}-\sqrt{\frac{2}{3}}(g_1+g_3)$. $\mu(V)\leqslant\frac{3}{8}\sqrt{3}^s-k(g_1^s+g_3^s)$, $f(g_1,g_3)=$

$1.08[\sqrt{2}-\sqrt{\frac{2}{3}}(g_1+g_3)]^s+k(g_1^s+g_3^s)-\frac{3}{8}\sqrt{3}^s$. 同样易证, $1.08|V|^s-\mu(V)\geqslant f>0$.

(7) 若 V 与 E_1 中的 2 个基本正方体相交. (a) 若 V 与 1 和 2 或者与 1 和 7 相交(图 3), 则有 $|V|\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mu(V)\leqslant\frac{\sqrt{3}^s}{4}$, 显然有 $\mu(V)<|V|^s$. (b) 若 V 与图 3 中的 1 和 3 两个基本正方体相交, 作与 V 相切且平行与平面 ABB' 的平面在 1 和 3 上的切割, 如图 3 所示. B', C' 到切平面的距离记 a, b $(0\leqslant a, b\leqslant\frac{1}{4})$, 则 $|V|\geqslant\frac{1}{2}$, $\mu(V)\leqslant\frac{\sqrt{3}^s}{4}$; 若 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{16}$, 则 $|V|\geqslant\frac{11}{16}$, 所以, $\mu(V)\leqslant|V|^s$; 如果 $\frac{1}{16}\leqslant a\leqslant\frac{3}{16}$, $\frac{1}{16}\leqslant b\leqslant\frac{1}{4}$, 则有 $|V|\geqslant\frac{9}{16}$, $\mu(V)\leqslant\frac{\sqrt{3}^s}{8}$, 所以, $\mu(V)\leqslant|V|^s$; 如果 $\frac{3}{16}\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$, $\frac{3}{16}\leqslant b\leqslant\frac{1}{4}$, 则有 $|V|\geqslant\frac{1}{2}$, $\mu(V)\leqslant\frac{\sqrt{3}^s}{8}$, 所以, 有 $\mu(V)\leqslant|V|^s$.

(8) 若 V 与 E_1 的一个基本正方体相交. 不妨设为 J_1 正方体, 则 $\mu(J_1\cap V)=\mu(V)$. 若 $J_1\cap V$ 仅与 E_2 的一个基本正方体 J_2 相交, 则有 $\mu(V)=\mu(J_2\cap V)$; 若 V 与 E_1 的 2 个以上基本正方体相交, 则由上面的情形可得 $\mu(V)\leqslant\mu(J_1\cap V)\leqslant 1.08|J_1\cap V|^s\leqslant 1.08|V|^s$. 由数学归纳法, 或者 $\mu(V)\leqslant 1.08|V|^s$, 或者存在 $J_n\subset E_n$, 使得 $\mu(V)\leqslant\mu(J_n\cap V)\leqslant\mu(J_n)=\frac{\sqrt{3}^s}{8}$. 令 $n\to\infty$, 得到 $\mu(V)\leqslant 1.08|V|^s$.

定理 2　$H^s(E)\geqslant\frac{\sqrt{3}^s}{1.08}\approx 2.110\,654\,68$.

证明　由质量分布原理和引理 2 可得, $H^s(E)\geqslant\frac{\sqrt{3}^s}{1.08}\approx 2.110\,654\,68$.

参考文献:

[1] 周作领, 吴　敏. 一个 Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度[J]. 中国科学, 1999, 29(2): 138-144.

[2] 贾宝国, 周作领, 朱智伟. 三分 Cantor 集自乘积的 Hausdorff 测度的估计[J]. 数学学报, 2003, 46(4): 747-752.

[3] 贾宝国, 周作领, 朱智伟. Cantor 集自乘积的 Hausdorff 测度的下界[J]. 数学年刊(A), 2003, 24(5): 575-582

[4] 黄精华, 赵燕芬. 一个三维 Sierpinski 块的 Hausdorff 测度[J]. 湖北大学学报: 自然科学版, 1999, 21(2): 181-184.

On the Hausdorff Measure for a Kind of Sierpinski Block

CHEN Ying-sheng

(School of Mathematics Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: We discuss the Hausdorff measure $H^s(E)$ for the Sierpinski block which comporession ratio is 0.25 and Hausdorff dimension is 1.5 by the principle of partial cover theorem and the distribution theorem. The following result is obtained: $2.110\,654\,68<H^s(E)<2.191\,500\,00$.

Keywords: Sierpinski bolck; Hausdorff measure; cover; mass distribution

(责任编辑: 鲁　斌　　英文审校: 张金顺, 黄心中)