

文章编号: 1000-5013(2009)01-0080-05

长悬臂桁架受横向集中力的拓扑优化

周克民, 李 霞

(华侨大学 土木工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 用解析方法推导拓扑优化最小重量长悬臂桁架。桁架在应力约束下,自由端受横向集中力作用,桁架宽度为常数,它的节长、结点坐标、腹杆和弦杆的角度,以及所有杆的横截面尺寸均为设计变量。分析结果表明,拓扑优化桁架中的各节腹杆的位置和横截面面积相同,中间结点位于每节 $1/4$ 位置。当结构长度趋于无限长时,腹杆趋于 30° 、 60° 相对 45° 桁架的体积差别不大,与类桁架连续体的体积差别也很小。

关键词： 拓扑优化；结构优化；桁架；悬臂梁

中图分类号: TU 323.401

文献标识码: A

近二三十年来,结构拓扑优化问题得到了越来越广泛的重视^[1-3]. 目前,主要是采用数值优化方法^[4-8],但只有有限的几个简单问题的解析解答,其中以悬臂梁问题研究的最多^[9-14]. 工程意义上离散的杆系形式的长悬臂梁桁架如输变电塔、天线等高耸结构在工程上应用很广,人们在长期的工程实践中已经注意到了它的优化设计问题. 如广泛应用的 45° 桁架就是比较合理的结构,但 30°/60° 桁架重量更小. 对于是否存在比 30°/60° 桁架重量更小的结构,即它的极限情况,以及这种离散杆系结构一般比理论上的最优解——类桁架连续体的体积大多少,一直是结构拓扑优化研究中的一个重要问题. 本文采用解析方法推导出了这些问题的答案.

1 受力分析

设桁架结构由 n 节构成, 结构等宽, 每节的尺寸和形状可以不一样, 如图 1 所示. 其结点和脱离体的

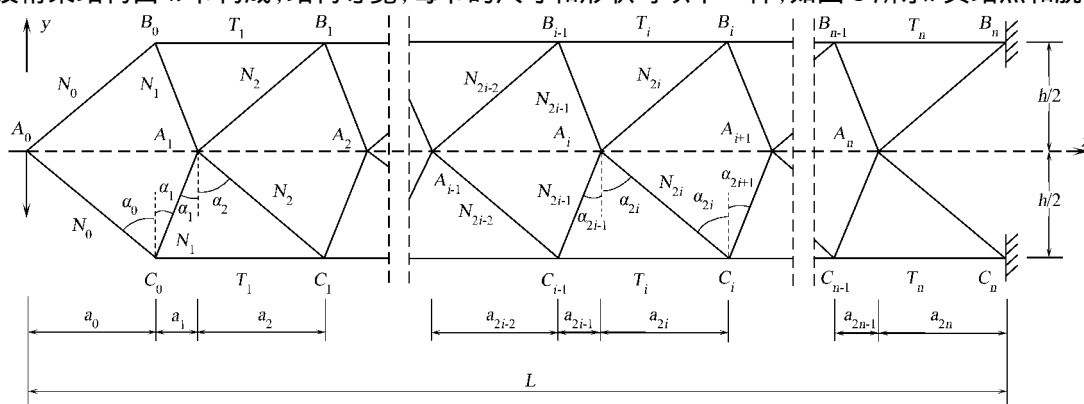


图 1 长悬臂梁桁架结构的基本尺寸

Fig. 1 Dimension of long cantilever truss

受力分析,如图 2 所示.两种常见的悬臂梁桁架^[15],如图 3 所示.假设腹杆和上下弦杆的内力分别为 N_i ($i=0, 1, \dots, 2n$)和 T_i ($i=1, 2, \dots, n$).由图 2(a)中的 A_0 点和图 2(b)中的 C_1 点的平衡条件得

收稿日期： 2008-03-10

通信作者: 周克民(1962-),男,教授,博士,主要从事结构拓扑优化的研究. E-mail:zhoukm@hqu.edu.cn.

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(10872072)；教育部科技研究重点项目(208169)；福建省自然科学基金计划资助项目(E0640010)

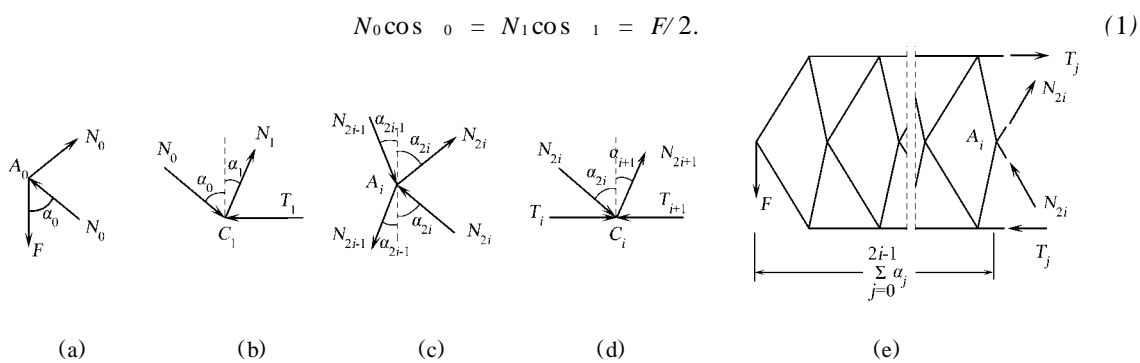


图 2 结点和脱离体的受力分析
Fig. 2 Free-body diagram

由图 2(c)中的 A_i 点和图 2(d)中的 C_i 点的平衡条件得

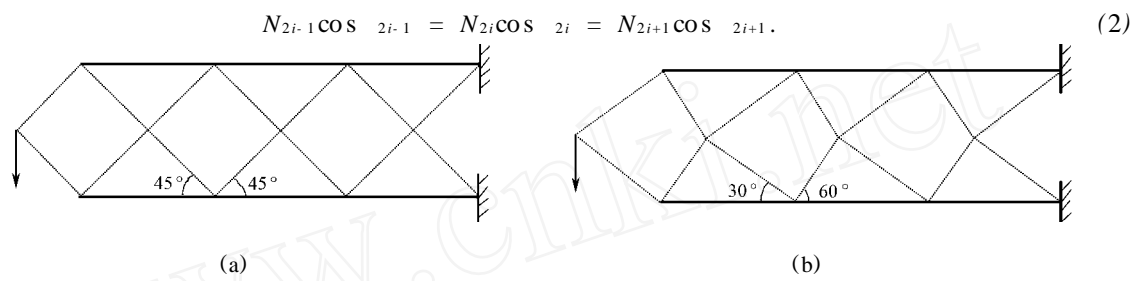


图 3 悬臂梁桁架

Fig. 3 Cantilever trusses

由式(1)可得

$$N_i = \frac{F}{2 \cos \alpha_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2n. \tag{3}$$

由图 2(e)关于 A_i 点力矩平衡条件,可得

$$T_i = \frac{F}{h} \sum_{j=0}^{2i-1} a_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{4}$$

由几何关系可知,腹杆的长度 $l_i (i = 0, 1, \dots, 2n)$ 和每节的长度 $a_i (i = 0, 1, \dots, 2n)$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} l_i &= \frac{h}{2 \cos \alpha_i}, \\ a_i &= \frac{h}{2} \tan \alpha_i. \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

2 悬臂梁体积极值的推导

单工况应力约束静定优化结构的各杆是满应力的,所以优化的体积是

$$V = 2 \sum_{i=0}^n \frac{N_i}{p} l_i + 2 \sum_{i=1}^{2n} \frac{T_i}{p} (a_{2i-1} + a_{2i}), \tag{6}$$

式(6)中, p 是许用应力. 优化问题可以表述为

$$\begin{aligned} &\text{Find } \{ n, a_i, N_i (i = 0, \dots, 2n), T_j (j = 1, \dots, n) \}, \\ &\min V. \end{aligned} \tag{7}$$

其约束条件: $\sum_{i=1}^{2n} a_i = L$, 平衡条件为式(1), (2).

将式(3) ~ (5)带入式(6),整理得

$$V = \frac{2F}{ph} \left[\frac{(2n+1)h^2}{4} + \sum_{i=0}^{2n} a_i^2 + \sum_{i=1}^n (a_{2i-1} + a_{2i}) a_j \right]. \tag{8}$$

悬臂梁长 L 应满足

$$L = \sum_{i=0}^{2n} a_i. \tag{9}$$

为计算体积 V 的极值,利用 Lagrange 乘子引入式(9)的条件,构造函数为

$$f = \frac{2F}{ph} \left[\frac{(2n+1)h^2}{4} + \sum_{i=0}^{2n} a_i^2 + \sum_{i=1}^n (\alpha_{2i-1} + \alpha_{2i}) \sum_{j=0}^{2i-1} a_j \right] + [L - \sum_{i=0}^{2n} a_i], \quad (10)$$

其极值条件为

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = \frac{2F}{ph} [(2 - (-1)^i) a_i + L] - 1 = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2n. \quad (11)$$

由式(11)可解得

$$a_i = \frac{\frac{ph}{2F} - L}{2 - (-1)^i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2n. \quad (12)$$

带入式(9)中,可解得

$$= \frac{4(2n+3)FL}{(4n+3)ph}. \quad (13)$$

将式(13)带入式(12)得到各结点的位置,即

$$\alpha_{2i-1} = \frac{L}{4n+3}, \quad \alpha_{2i} = \frac{3L}{4n+3}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

因此,可得

$$\frac{\alpha_{2i-1}}{\alpha_{2i}} = 1/3, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

中间结点位于各节的 $1/4$ 位置. 将式(14)带入式(8),并记 $\bar{L} = L/h$, 可得结构体积为

$$V(n, \bar{L}) = \frac{Fh}{2p} (4\bar{L}^2 \frac{2n+3}{4n+3} + 2n+1). \quad (16)$$

不同节数时,体积关于杆长的变化规律如图4所示. 式(16)取极小值的条件是

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{ph}{p} [1 - \frac{12\bar{L}^2}{(4n+3)^2}] = 0. \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n^2} = \frac{96Fh\bar{L}^2}{p(4n+3)^3} > 0. \quad (18)$$

式(18)显然成立,所以式(16)关于节数 n 有最小值. 由式(17)求解得

$$n = (2\sqrt{3}\bar{L} - 3)/4. \quad (19)$$

当然,式(19)不一定是整数. 对于图3(b)结构,有

$$\alpha_{2i-1} = 30^\circ, \quad \alpha_{2i} = 60^\circ, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

将式(5)带入式(9)也可以得到式(19). 因此,当 n 取整数时即为图3(b)结构. 这也就证明了图3(b)结构就是最小重量的拓扑优化结构.

如果式(19)不是整数,需要选择一个适当的整数. 为此,作如下分析. 对于一个确定的节数 n , 有对应的 \bar{L} 范围使得结构体积最小. 当长度超过某个临界值 $\bar{L}_c(n)$ 时,节数就应该增加到 $n+1$. 而在这个临界值位置,两个不同节数的体积应相等,即

$$V(n+1, \bar{L}_c) = V(n, \bar{L}_c), \quad (21)$$

由式(21)解得临界值为

$$\bar{L}_c(n) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4n+3}{3} (4n-1)}. \quad (22)$$

如上所述,当桁架分成 n 节并满足

$$\bar{L}_c(n) < \bar{L} < \bar{L}_c(n+1) \quad (23)$$

时,体积最小. 将式(22)带入式(23)解得

$$n \leq \frac{2\sqrt{3\bar{L}^2+1}-1}{4} \leq n+1, \quad (24)$$

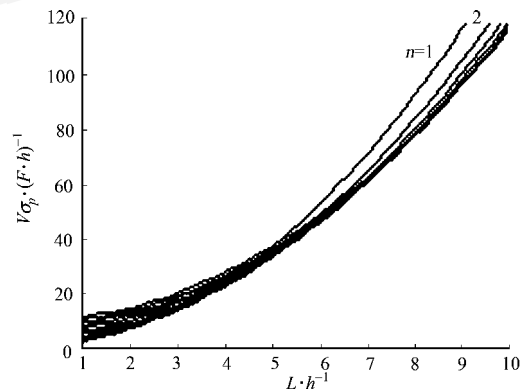


图4 不同节数的桁架体积

Fig. 4 Volume of truss with different number of panel

则取

$$n = \text{int}[\frac{2\sqrt{3\bar{L}^2+1}-1}{4}], \tag{25}$$

式(25)中, $\text{int}[\cdot]$ 表示向下取整. 将式(25)带入式(16)即得到最小的结构体积.

3 优化悬臂梁的性质推导

由式(16)可以计算出,当 $\bar{L}=3$ 时, $\bar{V}=13.954\ 5$. 文[9]给出的对应的类桁架体积 $\bar{V}=13.597\ 2$, 相对误差为 2.6%. 这表明类桁架连续体与对应的离散桁架的体积差别不大. 这一事实也支持了先构造类桁架连续体,再离散化为桁架的拓扑优化方法的可行性^[16].

由式(14)可以计算得腹杆的角度,有

$$\left. \begin{aligned} 2i-1 &= \arctan \frac{a_{2i-1}}{h/2} = \arctan \frac{2\bar{L}}{4n+3}, & i &= 0, 1, 2, \dots, n, \\ 2i &= \arctan \frac{a_{2i}}{h/2} = \arctan \frac{6\bar{L}}{4n+3}, & i &= 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

腹杆角度关于桁架长度的变化规律,如图 5 所示. 从式(14), (26)可以看出,各节的长度相同,所有腹杆的角度也相同. 因此,结合式(3)还可以看出,所有腹杆的轴力也相同,但弦杆的轴力与相对自由端的距离成正比.

当 \bar{L} 时,由式(25)可知, $n = \frac{\sqrt{3\bar{L}^2+1}-1}{2}$. 带入式(26)可得

$$2i-1 = \frac{\pi}{6}, \quad 2i = \frac{\pi}{3}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \tag{27}$$

因此,当悬臂梁趋于无限长时,结构趋于图 3(b)桁架. 本文拓扑优化桁架与图 3(a)桁架的体积比较结果,如图 6 所示.

$$V_{45} = \frac{Eh}{p} (\bar{L}^2 + 2\bar{L} - \frac{1}{4}), \quad V_{30} = \frac{Eh}{p} (\bar{L}^2 + \sqrt{3}\bar{L} - \frac{1}{4}). \tag{28}$$

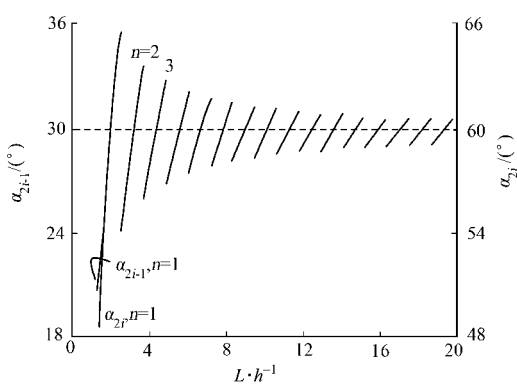


图 5 腹杆的角度

Fig. 5 Angle of shear bracing

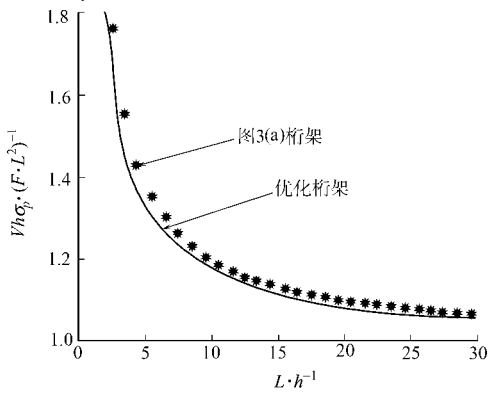


图 6 不同桁架的体积比较

Fig. 6 Comparison of volumes of different truss

式(28)与文[15]中给出的对应的体积公式不同,修正了文[15]中的一个错误. 从图 6 可以看出,两种桁架的体积区别不大. 计算结果表明,当 $\bar{L}=5.5, 10.5$ 和 15.5 时,优化结构的体积比图 3(a)的桁架大 3.7%, 2.2% 和 1.6%. 图 6 中的图 3(a)桁架仅计算了几个离散点的体积值.

4 结束语

本文讨论了应力约束的自由端受横向集中力作用下,最小重量(体积)等宽长悬臂梁桁架的拓扑和几何性质. 给出了最优桁架的节数、腹杆的角度,以及所有杆件的横截面面积. 与传统的 45° 桁架比较,当长度较大时区别很小. 另外,该算例也验证了离散桁架与对应类桁架的体积区别很小. 理论证明,这种应力约束最小重量结构也是重量约束下的柔度(外力功)最小结构,或者称为刚度最大结构.

参考文献:

- [1] ROZVANY G I N, BENDS E M P, KIRSCH U. Layout optimization of structures [J]. Applied Mechanics Reviews, 1995, 48(2): 41-119.
- [2] ESCHENAUER H A, OLHOFF N. Topology optimization of continuum structures: A review[J]. Applied Mechanics Reviews, 2001, 54(4): 331-389.
- [3] 王全凤. 结构优化设计的新进展[J]. 华侨大学学报:自然科学版, 1992, 13(3): 353-357.
- [4] BENDS E M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method [J]. Comput Meth Appl Mech Engng, 1988, 71: 197-224.
- [5] XIE Y M, STEVEN G P. A simple evolutionary procedure for structures optimization[J]. Comput Struct, 1993, 49: 885-896.
- [6] OSHER S, FEDKIW R. Level set methods and dynamic implicit surfaces[M]. New York: Springer, 2003.
- [7] 刘书田, 程耿东. 复合材料应力分析的均匀化方法[J]. 力学学报, 1997, 29(3): 306-313.
- [8] 隋允康, 彭细荣. 结构拓扑优化 ICM 方法的改善[J]. 力学学报, 2005, 37(2): 190-198.
- [9] LEWINSKI T, ZHOU M, ROZVANY G I N. Extended exact solutions for least-weight truss layouts(): Cantilever with a horizontal axis of symmetry[J]. Int J Mech Sci, 1994, 36(5): 375-398.
- [10] LEWINSKI T, ZHOU M, ROZVANY G I N. Extended exact solutions for least-weight truss layouts(): Unsymmetric cantilevers[J]. Int J Mech Sci, 1994, 36(5): 399-419.
- [11] GRACZYKOWSKI C, LEWINSKI T. Michell cantilevers constructed within trapezoidal domains(): Geometry of Hencky nets[J]. Struct Optim, 2006, 32(5): 347-368.
- [12] GRACZUL PWSLO C, LEWINSKI T. Michell cantilevers constructed within trapezoidal domains(): Virtual displacement fields[J]. Struct Optim, 2006, 32(6): 347-368.
- [13] GRACZUL PWSLO C, LEWOMSLO T. Michell cantilevers constructed within trapezoidal domains(): Force fields[J]. Struct Optim, 2006, 33(1): 1-19.
- [14] GRACZUL PWSLO C, LEWOMSLO T. Michell cantilevers constructed within trapezoidal domains(): Complete exact solutions of selected optimal designs and their approximations by trusses of finite number of joints[J]. Struct Optim, 2006, 33(2): 113-129.
- [15] HEMP W S. Optimum Structure[M]. Oxford: Clarendon Press, 1973.
- [16] ZHOU K, LI X. Topology optimization of structures under multiple load cases using fiber-reinforced composite material model[J]. Comput Mech, 2006, 38(2): 163-170.
- [16] BENDS E M P, BEN-TALAL A, ZOWE J. Optimization methods for truss geometry and topology design[J]. Struct Optim, 1994, 7: 141-159.

Topological Optimum of Long Cantilever Truss under Transverse Concentrated Load

ZHOU Ke-min, LI Xia

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Topology optimization design of long cantilever truss with minimum weight is derived analytically. A transverse concentrated load is applied at its free end. The truss with constant width is subjected to stress constraints. The panel lengths, nodal coordinates, the angles of the chords, the web members and the cross-sectional areas are taken as design variables. It is proved that there is no difference of the positions and the cross-sectional areas of web members between different panels in topological optimum truss. The middle nodes of web members locate at position of $1/4$ of panel length. The topological optimum truss is similar to the truss with web members of 45° when the topological optimum truss tends to infinite long. The difference of volume between truss-like continuum and corresponding discrete truss is slight.

Keywords: structural optimization; topology optimization; truss; cantilever

(责任编辑: 鲁 斌 英文审校: 方德平)