第 29 卷　第 4 期　　华 侨 大 学 学 报 (自 然 科 学 版)　　Vol. 29　No. 4
2008 年 10 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Oct.　2008

文章编号:　100025013(2008) 0420630203

与股票相关的欧式汇率买入期权定价公式

郭　峰, 李时银

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要:　在标的资产价格服从对数正态过程的条件下,研究与股票相关联的欧式汇率买入期权的定价问题.将对数正态扩散过程表达的随机过程转化为风险中性, 并在此条件下用鞅定价方法推导出与股票相关联的欧式汇率买入期权的价格公式1

关键词:　欧式汇率; 买入期权; 期权定价; 鞅定价方法; 风险中性

中图分类号:　O 211.63; F 830.91　　　文献标识码:　A

为规避外国股价及汇率风险带来的损失, 不少金融机构根据投资人的不同需求, 设计出多种欧式汇率/股票买入期权[122]. 与股票相关联的欧式汇率买入期权, 就是特别为那些喜欢购买外国资产但希望有一个汇率下限的投资者设计的. 本文在标的变量服从对数正态扩散过程的假设下, 用鞅定价方法计算出它的解析定价公式.

1　市场模型与假设

设 W_t^S 与 W_t^F 均为某概率空间(8, /F , P) 上的标准布朗运动, 有

$$3dW_t^S, dW_t^F 4 = Qdt1$$

式中, Q为相关系数, S_t 表示 t 时以外币计价的外国股价, F_t 表示 t 时以国内货币计价的一单位外币(t 时即期汇率)1 它们分别满足对数正态扩散过程, 即

$$dS_t = S_t[(L_S - q_f) dt + R_S dW_t^S], \tag{1}$$

$$dF_t = F_t(L_F dt + R_F dW_t^F)1 \tag{2}$$

上式中, L_S, L_F 为漂移率常数, R_S, R_F 为波动率常数, q_f 为 S_t 的红利率常数. 设国外和国内无风险利率常数分别为 r_f 与 r_d.

考虑与股票相关的欧式汇率买入期权, 其在到期 T 时的收益为

$$C_T = S_T \max(F_T - X, 0)1$$

其中, X 为汇率下限, 即汇率执行价. 下面在风险中性条件下推导该期权的定价方程, 从而将(1), (2) 表达的随机过程转化为风险中性的. 为此设该期权的价格函数 $C_t = C(S_t, F_t, t)$ 为二阶可微函数, 且资本市场满足 BlackOScholes 模型的其他假设[3].

2　定价方程与风险中性过程

在区间[t, t+ dt] 上构造一个包含一单位衍生证券 C, A_1 单位标的资产 S 和 A_2 单位标的资产 F 的无风险套期保值组合 P, 其价值为

$$P = C + A_1 SF + A_2 F.$$

在 dt 时间内, 该组合价值的改变量为

收稿日期:　2007206216

作者简介:　郭　峰(19722), 女, 讲师, 主要从事偏微分方程数值解及金融数学的研究. E2mail: hydhgf@163.com.

基金项目:　华侨大学科研基金资助项目(04HZR08)

$$dP = dC + \Delta_1 d(SF) + q_f \Delta_1 SF\,dt + \Delta_2 dF + r_f \Delta_2 F\,dt =$$
$$\left(\frac{\partial C}{\partial S} + \Delta_1 F\right) dS + \left(\frac{\partial C}{\partial F} + \Delta_1 S + \Delta_2\right) dF +$$
$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \rho\sigma_S\sigma_F SF \frac{\partial^2 C}{\partial S\partial F} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma_F^2 F^2 \frac{\partial^2 C}{\partial F^2} + \Delta_1 \rho\sigma_S\sigma_F SF + q_f \Delta_1 SF + r_f \Delta_2 F\right) dt,$$

令$\frac{\partial C}{\partial S} + \Delta_1 F = 0$, $\frac{\partial C}{\partial F} + \Delta_1 S + \Delta_2 = 0$. 消去随机项, 可得

$$\Delta_1 = -\frac{1}{F}\frac{\partial C}{\partial S}, \qquad \Delta_2 = \frac{1}{F}\left(\frac{\partial C}{\partial S} S - \frac{\partial C}{\partial F} F\right).$$

此时, 组合 P 成为无风险组合, 应获得无风险利率 r_d, 即 $dP = r_d P dt$. 从而可得定价方程为

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \rho\sigma_S\sigma_F SF \frac{\partial^2 C}{\partial S\partial F} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma_F^2 F^2 \frac{\partial^2 C}{\partial F^2} +$$
$$(r_d - r_f) F \frac{\partial C}{\partial F} + (r_f - q_f - \rho\sigma_S\sigma_F) S \frac{\partial C}{\partial S} - r_d C = 0.$$

根据文献[4-5], 在国内风险中性世界里, 标的变量 S_t, F_t 的变动过程可改写为

$$dS_t = S_t[(r_f - q_f - \rho\sigma_S\sigma_F) dt + \sigma_S d\tilde{W}_t^S], \tag{3}$$
$$dF_t = F_t[(r_d - r_f) dt + \sigma_F d\tilde{W}_t^F]. \tag{4}$$

其中, $\tilde{W}_t^S$ 与 $\tilde{W}_t^F$ 为与测度 P 等价的国内风险中性测度 Q 下的标准布朗运动, 除漂移率发生变化外, 波动率与相关系数并未改变.

3　定价公式

利用伊藤引理(Itô Lemma) , 可得式(3) , (4) 的解为

$$S_T = S_t \exp\left[\left(r_f - q_f - \rho\sigma_S\sigma_F - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)(T - t) + \sigma_S(\tilde{W}_T^S - \tilde{W}_t^F)\right], \tag{5}$$
$$F_T = F_t \exp\left[\left(r_d - r_f - \frac{\sigma_F^2}{2}\right)(T - t) + \sigma_F(\tilde{W}_T^F - \tilde{W}_t^F)\right], \tag{6}$$

且 $\tilde{W}_T^S - \tilde{W}_t^S \triangleq \Delta\tilde{W}_t^S \sim N(0, T - t)$, $\tilde{W}_T^F - \tilde{W}_t^F \triangleq \Delta\tilde{W}_t^F \sim N(0, T - t)$.

由鞅定价理论, 期权在 t 时的价格为

$$C_t = E_Q[e^{-r_d(T-t)} C_T \mid \mathcal{F}_t].$$

这里, $E_Q[\,\cdot \mid \mathcal{F}_t]$ 为风险中性测度 Q 下的条件期望, 而 $\mathcal{F}_t = \sigma(W_u^S, W_u^F, 0 \le u \le t) = \sigma(\tilde{W}_u^S, \tilde{W}_u^F, 0 \le u \le t)$. 为方便起见, 下面一律省去 $\mathcal{F}_t$, 即用 $E_Q[\,\cdot\,]$ 表示 $E_Q[\,\cdot \mid \mathcal{F}_t]$, 则有

$$C_t = E_Q[\exp(-r_d(T - t)) S_T \max(F_T - X, 0)] =$$
$$\exp(-r_d(T - t)) E_Q[S_T(F_T - X) \cdot I_{(F_T > X)}] \triangleq \exp(-r_d(T - t)) \cdot (E_1 - XE_2). \tag{7}$$

上式中, $E_1 = E_Q[S_T F_T I_{(F_T > X)}]$, $E_2 = E_Q[S_T I_{(F_T > X)}]$.

(i) 先计算 E_1. 将式(5) , (6) 代入得

$$E_1 = S_t F_t \exp\left(\left(-r_d - q_f - \rho\sigma_S\sigma_F - \frac{\sigma_S^2}{2} - \frac{\sigma_F^2}{2}\right)(T - t)\right) E_Q[\exp(\sigma_S \Delta\tilde{W}_t^S + \sigma_F \Delta\tilde{W}_t^F) I_{(F_T > X)}].$$

令 $x = \frac{\Delta\tilde{W}_t^S}{\sqrt{T - t}}$, $y = \frac{\Delta\tilde{W}_t^F}{\sqrt{T - t}}$, 则 $x \sim N(0, 1)$, $y \sim N(0, 1)$, 故 x 与 y 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1 - \rho^2)}\right],$$

从而有

$$E_{11} \triangleq E_Q[\exp(\sigma_S \Delta\tilde{W}_t^S + \sigma_F \Delta\tilde{W}_t^F) I_{(F_T > X)}] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{a}^{+\infty} \exp((\sigma_S x + \sigma_F y)\sqrt{T - t}) f(x, y)\, dx\, dy.$$

其中, $a = \left[\ln\frac{X}{F_t} - \left(r_d - r_f - \frac{\sigma_F^2}{2}\right)(T - t)\right] / \sigma_F\sqrt{T - t}$.

作变量代换, $x_1 = x - (\sigma_S + \rho\sigma_F)\sqrt{T - t}$, $y_1 = y - (\sigma_F + \rho\sigma_S)\sqrt{T - t}$, $A = [(\sigma_S + \rho\sigma_F)^2 + (\sigma_F + \rho\sigma_S)^2 -$

$2\rho(\sigma_S+\rho\sigma_F)(\sigma_F+\rho\sigma_S)](T-t)$, 则

$$E_{11}=\exp(A/2(1-\rho^2))\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{a-(\sigma_F+\rho\sigma_S)\sqrt{T-t}}^{+\infty}\exp\left[-\frac{x_1^2-2\rho x_1y_1+y_1^2}{2(1-\rho^2)}\right]dy_1dx_1=\exp\left(\frac{A}{2(1-\rho^2)}\right)N(d).$$

因此, 有

$$E_1=S_tF_t\exp\left[\left(r_d-q_f-\rho\sigma_S\sigma_F-\frac{\sigma_S^2}{2}-\frac{\sigma_F^2}{2}\right)(T-t)\right]E_{11}=S_tF_t\exp[(r_d-q_f)(T-t)]N(d),$$

$$d=-a+(\sigma_F+\rho\sigma_S)\sqrt{T-t}=\frac{\ln\frac{F_t}{X}+(r_d-r_f+\rho\sigma_S\sigma_F)(T-t)}{\sigma_F\sqrt{T-t}}+\frac{\sigma_F}{2}\sqrt{T-t}. \qquad (8)$$

(ii) 用类似方法计算 E_2. 同样可得

$$E_2=S_t\exp\left[\left(r_f-q_f-\rho\sigma_S\sigma_F-\frac{\sigma_S^2}{2}\right)(T-t)\right]E_Q[\exp(\sigma_S\cdot\tilde{W}_t^S)I_{(F_T>X)}]=$$

$$S_t\exp\left[\left(r_f-q_f-\rho\sigma_S\sigma_F-\frac{\sigma_S^2}{2}\right)(T-t)\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\int_a^{+\infty}\exp(\sigma_S x\sqrt{T-t})f(x,y)dydx.$$

经变量代换, $x_2=x-\sigma_S\sqrt{T-t}$, $y_2=y-\rho\sigma_S\sqrt{T-t}$. 则有

$$E_2=S_t\exp[(r_f-q_f-\rho\sigma_S\sigma_F)(T-t)]\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{a-\rho\sigma_S\sqrt{T-t}}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{x_2^2-2\rho x_2y_2+y_2^2}{2(1-\rho^2)}\right]dy_2dx_2=$$

$$S_t\exp[(r_f-q_f-\rho\sigma_S\sigma_F)(T-t)]N(d-\sigma_F\sqrt{T-t}).$$

从而, 由式(7)可得与股票相关联的欧式汇率买入期权的价格公式为

$$C_t=S_tF_t\exp[(-q_f(T-t)]N(d)-XS_t\exp[(r_f-r_d-q_f-\rho\sigma_S\sigma_F)(T-t)]N(d-\sigma_F\sqrt{T-t}).$$

其中, d 如式(8)所定义.

参考文献:

[1] 李时银. 期权定价与组合选择——金融数学与金融工程的核心[M]. 厦门: 厦门大学出版社, 2002.

[2] 陈松男. 金融工程学[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2002.

[3] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654.

[4] COX J C, INGERSOLL J E, ROSS S A. An intertemporal general equilibrium model of asset prices[J]. Econometrica, 1985, 53(2): 364-384.

[5] JOHN C H. Options, futures, and other derivatives[M]. 5th ed. 北京: 清华大学出版社, 2006.

The Pricing Formula for European Exchange Rate Call Option Related with the Stock

GUO Feng, LI Shi-yin

(School of Mathematics Science, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: We studing the pricing problem of pricing European exchange rate call option related with the stock under the condition that underlying assets price following the logarithmic normal processes. By applying the martingale pricing method in a world in which the logarithmic normal diffuse processes are expressed risk-neutral, we get European exchange rate call option related with the stock.

Keywords: European exchange rate; call option; option pricing; martingale pricing method; risk-neutral

(责任编辑: 黄仲一 英文审校: 张金顺, 黄心中)