第 29 卷 第 4 期
2008 年 10 月

华侨大学学报 (自然科学版)
Journal of Huaqiao University (Natural Science)

Vol. 29 No. 4
Oct. 2008

文章编号: 1000-5013(2008)04-0618-04

两类单叶调和函数的偏差估计

韩 雪, 黄心中

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 在 Öztürk 和 Yalçin 研究单位圆 $U=\{z\mid |z|<1\}$ 上保向单叶调和函数类 $HS(\alpha)$ 和 $HC(\alpha)$ 的某些偏差估计的基础上, 进一步研究 $HS(\alpha)$ 和 $HC(\alpha)$ 类的函数特征, 得到精确的模偏差估计. 对于 $HC(\beta)$ 类, $\beta\leqslant\alpha$, 推广调和函数 δ-邻域的相关结果, 特别当 $\beta=\alpha$ 时, 得到相应的结论.

关键词: 单叶调和函数; 偏差; 极值函数; δ-邻域

中图分类号: O 174.51 文献标识码: A

1 背景

令 U 表示单位圆, 即 $U=\{z\mid |z|<1\}$. S_H 表示定义在 U 上的保向单叶调和函数. 如果 $f\in S_H$, 则有 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$, 其中, $h(z)$, $g(z)$ 在 U 上解析, 即

$$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n,\qquad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n.$$

对保向单叶调和函数的性质已有很多研究, 如系数估计、模偏差、面积偏差等[1-4]. 文[5]研究 S_H 类中两类子族的性质, 得到一些结论. 按文[5]的定义, 记

$$HS(\alpha)=\{f\mid f\in S_H,\text{且}\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|a_n|+|b_n|)\leqslant(1-\alpha)(1-|b_1|),0\leqslant\alpha<1\},$$

$$HC(\alpha)=\{f\mid f\in S_H,\text{且}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)(|a_n|+|b_n|)\leqslant(1-\alpha)(1-|b_1|),0\leqslant\alpha<1\}.$$

则可得到下面的定理.

定理 A 若 $f\in HS(\alpha)$, 则有

$$\left.\begin{aligned}|f(z)|\leqslant(1+|b_1|)|z|+\frac{1}{2}(1-\alpha^2)(1-|b_1|)|z|^2,\\ |f(z)|\geqslant(1-|b_1|)|z|-\frac{1}{2}(1-\alpha^2)(1-|b_1|)|z|^2.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式(1)中, 等式由

$$f_\theta(z)=z+|b_1|e^{i\theta}\bar{z}+\frac{(1-\alpha^2)(1-|b_1|)}{2}\bar{z}^2$$

达到.

定理 B 若 $f\in HC(\alpha)$, 则有

$$\left.\begin{aligned}|f(z)|\leqslant(1+|b_1|)|z|+\frac{1}{2\alpha}(3-\alpha-2\alpha^2)(1-|b_1|)|z|^2,\\ |f(z)|\geqslant(1-|b_1|)|z|-\frac{1}{2\alpha}(3-\alpha-2\alpha^2)(1-|b_1|)|z|^2.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式(2)中, 等式由

$$f_\theta(z)=z+|b_1|e^{i\theta}\bar{z}+\frac{3-\alpha-2\alpha^2}{2\alpha}(1-|b_1|)\bar{z}^2$$

收稿日期: 2007-12-02
作者简介: 韩 雪(1978-), 女, 讲师, 主要从事函数论的研究. E-mail: hx611@sohu.com.
基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(Z0511025); 华侨大学科研基金资助项目(07HZR03)

达到.

此外, 假设 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n}$, $F(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}A_nz^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}B_nz^n}$ 均为 U 上的保向单叶调和函数, $f(z)$ 的 δ-邻域定义为

$$N_\delta(f)=\{F:\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|a_n-A_n|+|b_n-B_n|)+(1-\alpha)|b_1-B_1|\leqslant(1-\alpha)\delta\}.$$

定理 C　假设 $f(z)=z+\overline{b_1z}+\sum_{n=2}^{\infty}(a_nz^n+\overline{b_nz^n})\in HC(\alpha)$, 如果 $\delta\leqslant\frac{1-\alpha}{2-\alpha}(1-|b_1|)$, 则有 $N_\delta(f)\subset HS(\alpha)$.

以上 3 个定理皆由文[5]所证明. 文中进一步研究 $HS(\alpha)$, $HC(\alpha)$ 函数特征及其 δ-邻域的范围, 得到一些更好的结论.

2　主要结果及证明

定理 1　如果 $f\in HS(\alpha)$, 则有

$$|f(z)|\leqslant(1+|b_1|)|z|+\frac{1-\alpha}{2-\alpha}(1-|b_1|)|z|^2, \tag{3}$$

$$|f(z)|\geqslant(1-|b_1|)|z|-\frac{1-\alpha}{2-\alpha}(1-|b_1|)|z|^2. \tag{4}$$

上两式中, 等式由 $\phi(z)=z+|b_1|\bar{z}+\frac{1-\alpha}{2-\alpha}(1-|b_1|)\bar{z}^2$ 所达到.

证明　仅证明式(3), 式(4)可类似证明. 设 $f\in HS(\alpha)$, 因为

$$|f(z)|\leqslant|h(z)|+|g(z)|=|z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n|+|\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n|\leqslant$$
$$|z|+\sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^n+|b_1||z|+\sum_{n=2}^{\infty}|b_n||z|^n\leqslant$$
$$(1+|b_1|)|z|+\sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)|z|^2.$$

由于 $f\in HS(\alpha)$, 则有

$$\sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2-\alpha}(n-\alpha)(|a_n|+|b_n|)=$$
$$\frac{1}{2-\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|a_n|+|b_n|)\leqslant\frac{1}{2-\alpha}(1-\alpha)(1-|b_1|).$$

因此有

$$|f(z)|\leqslant(1+|b_1|)|z|+\frac{1}{2-\alpha}(1-\alpha)(1-|b_1|)|z|^2.$$

式(3)可证. 易证 $\phi(z)=z+|b_1|\bar{z}+\frac{1-\alpha}{2-\alpha}(1-|b_1|)\bar{z}^2\in HS(\alpha)$, 且 $|\phi(r)|$ 达到等号.

定理 2　若 $f\in HC(\alpha)$, 则

$$|f(z)|\leqslant(1+|b_1|)|z|+\frac{1-\alpha}{4-2\alpha}(1-|b_1|)|z|^2, \tag{5}$$

$$|f(z)|\geqslant(1-|b_1|)|z|-\frac{1-\alpha}{4-2\alpha}(1-|b_1|)|z|^2. \tag{6}$$

等式由 $\phi(z)=z+|b_1|\bar{z}+\frac{1-\alpha}{4-2\alpha}(1-|b_1|)\bar{z}^2$ 所达到.

证明　仅证明式(5), 式(6)可类似证明. 设 $f\in HC(\alpha)$, 则有

$$|f(z)|\leqslant|h(z)|+|g(z)|=|z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n|+|\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n|\leqslant$$
$$|z|+\sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^n+|b_1||z|+\sum_{n=2}^{\infty}|b_n||z|^n\leqslant$$
$$(1+|b_1|)|z|+\sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)|z|^2.$$

由于有

$$\sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2(2-\alpha)}n(n-\alpha)(|a_n|+|b_n|)=$$

$$\frac{1}{2(2-\alpha)}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)(|a_n|+|b_n|)\leqslant\frac{1}{2(2-\alpha)}(1-\alpha)(1-|b_1|).$$

故

$$|f(z)|\leqslant(1+|b_1|)|z|+\sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)|z|^2\leqslant$$

$$(1+|b_1|)|z|+\frac{1}{4-2\alpha}(1-\alpha)(1-|b_1|)|z|^2.$$

因此有

$$|f(z)|\leqslant(1+|b_1|)|z|+\frac{1}{4-2\alpha}(1-\alpha)(1-|b_1|)|z|^2$$

式(5)证毕.

同理, 式(5)等号由 $\phi(z)=z+|b_1|\bar{z}+\frac{1-\alpha}{4-2\alpha}(1-|b_1|)\bar{z}^2$ 所达到.

注 1 考虑定理 A 中给出的极值函数为 $f_\theta(z)=z+|b_1|e^{i\theta}\bar{z}+\frac{(1-\alpha^2)(1-|b_1|)}{2}\bar{z}^2$, 必须有

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|a_n|+|b_n|)=(2-\alpha)\left(\frac{(1-|b_1|)}{2}\right)(1-\alpha^2)\leqslant(1-\alpha)(1-|b_1|),$$

但当 $\alpha\neq0$ 时, 上式不成立, 即当 $0<\alpha<1$ 时, $f_\theta(z)=z+|b_1|e^{i\theta}\bar{z}+\frac{(1-\alpha^2)(1-|b_1|)}{2}\bar{z}^2\notin HS(\alpha)$, 故定理 A 的结论是有误的.

注 2 定理 B 中所述的极值函数为

$$f_\theta(z)=z+|b_1|e^{i\theta}\bar{z}+\frac{3-\alpha-2\alpha^2}{2\alpha}(1-|b_1|)\bar{z}^2\notin HC(\alpha).$$

下面, 推广定理 C 的结论.

定理 3 $f(z)=z+\overline{b_1z}+\sum_{n=2}^{\infty}(a_nz^n+\overline{b_nz^n})\in HC(\alpha)$, 若 $\delta\leqslant\frac{1}{2}(1-|b_1|)$, 则 $N_\delta(f)\subset HS(\alpha)$.

证明 设 $f(z)\in HC(\alpha)$, $F(z)=z+\overline{B_1z}+\sum_{n=2}^{\infty}(A_nz^n+\overline{B_nz^n})\in N_\delta(f)$, 则有

$$(1-\alpha)|B_1|+\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|A_n|+|B_n|)\leqslant(1-\alpha)|B_1-b_1|+(1-\alpha)|b_1|+$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|A_n-a_n|+|B_n-b_n|)+\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|a_n|+|b_n|)\leqslant$$

$$(1-\alpha)\delta+(1-\alpha)|b_1|+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)(|a_n|+|b_n|)\leqslant$$

$$(1-\alpha)\delta+(1-\alpha)|b_1|+\frac{1}{2}(1-\alpha)(1-|b_1|).\tag{7}$$

故当 $\delta\leqslant\frac{1}{2}(1-|b_1|)$时, $(1-\alpha)|B_1|+\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|A_n|+|B_n|)\leqslant(1-\alpha)\frac{1}{2}(1-|b_1|)+(1-\alpha)|b_1|+\frac{1}{2}(1-\alpha)(1-|b_1|)=1-\alpha$. 因此$(1-\alpha)|B_1|+\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|A_n|+|B_n|)\leqslant1-\alpha$. 即 $\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|A_n|+|B_n|)\leqslant(1-\alpha)(1-|B_1|)$, 从而 $F(z)\in HS(\alpha)$, 故 $N_\delta(f)\subset HS(\alpha)$.

定理 4 若 $f(z)=z+\overline{b_1z}+\sum_{n=2}^{\infty}(a_nz^n+\overline{b_nz^n})\in HC(\beta)$, $0\leqslant2\alpha-1\leqslant\beta\leqslant\alpha$; 以及 $\delta\leqslant\frac{1}{2}\frac{1}{1-\beta}(1-|b_1|)(1+\beta-2\alpha)$, 则 $N_\delta(f)\subset HS(\alpha)$.

证明 令 $f(z)\in HC(\beta)$, $F(z)=z+\overline{B_1z}+\sum_{n=2}^{\infty}(A_nz^n+\overline{B_nz^n})\in N_\delta(f)$, 则

$$(1-\alpha)|B_1|+\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|A_n|+|B_n|)\leqslant(1-\alpha)|B_1-b_1|+(1-\alpha)|b_1|+$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|A_n-a_n|+|B_n-b_n|)+\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|a_n|+|b_n|)\leqslant$$
$$(1-\beta)|B_1-b_1|+(1-\alpha)|b_1|+\sum_{n=2}^{\infty}(n-\beta)(|A_n-a_n|+|B_n-b_n|)+$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|a_n|+|b_n|)\leqslant(1-\beta)\delta+(1-\alpha)|b_1|+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)(|a_n|+|b_n|)\leqslant$$
$$(1-\beta)\delta+(1-\alpha)|b_1|+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\beta)(|a_n|+|b_n|)\leqslant$$
$$(1-\beta)\delta+(1-\alpha)|b_1|+\frac{1}{2}(1-\beta)(1-|b_1|).\tag{8}$$

当 $\delta\leqslant\frac{1}{2}\frac{1}{1-\beta}(1-|b_1|)(1+\beta-2\alpha)$时, $(1-\alpha)|B_1|+\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|A_n|+|B_n|)\leqslant(1-\beta)\frac{1}{2}\frac{1}{1-\beta}(1-|b_1|)(1+\beta-2\alpha)+(1-\alpha)|b_1|+\frac{1}{2}(1-\beta)(1-|b_1|)=\frac{1}{2}(1-|b_1|)[(1+\beta-2\alpha)+(1-\beta)]+(1-\alpha)\times|b_1|=\frac{1}{2}(1-|b_1|)(2-2\alpha)+(1-\alpha)|b_1|=1-\alpha$ 因此 $(1-\alpha)|B_1|+\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|A_n|+|B_n|)\leqslant(1-\alpha)$, 即 $\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(|A_n|+|B_n|)\leqslant(1-\alpha)(1-|B_1|)$, 因此 $F(z)\in HS(\alpha)$, 故 $N_\delta(f)\subset HS(\alpha)$.

注 3　比较定理 C 及定理 4 中的 $f(z)$ 范围. 定理 C 中 $f(z)\in HC(\alpha)$, 定理 4 中 $f(z)\in HC(\beta)$. 由于 $\beta\leqslant\alpha$, 可知 $HC(\alpha)\subset HC(\beta)$. 故定理 4 在 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha<1$ 的情况下, 加强了定理 C 的结果. 特别地, 当 $\beta=\alpha$ 时, 即定理 3 的结论.

参考文献:

[1] CLUNIE J, SHEIL-SMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math, 1984, 9: 3-25.

[2] SILVERMAN H. Harmonic univalent functions with negative coeffcients[J]. Math Anal and App, 1998, 220(1): 283-289.

[3] YALÇIN S. A new class of Salagean-type harmonic univalent functions[J]. App Math Lett, 2005, 18: 191-198.

[4] AHUJA O P, JAHANGIRI J M. Certain multipliers of univalent harmonic functions[J]. App Math Lett, 2005, 18: 1319-1324.

[5] ÖZTÜRK M, YALÇIN S. On univalent harmonic functions[J]. Ineq Pure Appl Math, 2002, 3(4): 1-8.

Estimate on the Distortion for Two Classes of Harmonic Univalent Functions

HAN Xue, HUANG Xin-zhong

(School of Mathematics Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Öztürk and Yalçin gave some distortion estimates for two classes $HS(\alpha)$ and $HC(\alpha)$, both are subclasses of univalent harmonic mappings on the unit disk. In this paper, we will improve their results, obtain some sharp estimates. In addition, to the class $HC(\beta)$, $\beta\leqslant\alpha$, its δ-neighborhood is considered. Some relative results are extended.

Keywords: univalent harmonic function; distortion; extremal function; δ-neighborhood

(责任编辑: 鲁　斌　　英文审校: 张金顺, 黄心中)