

文章编号: 1000-5013(2008) 04 0605- 04

高层筒中筒结构协同分析的状态空间法

钟芳林¹, 胡启平²

(1. 邯郸职业技术学院 建工系, 河北 邯郸 056001; 2. 河北工程大学 土木工程学院, 河北 邯郸 056038)

摘要: 将状态空间方法引入筒中筒结构的协同分析中, 在结构连续化假定的基础上, 建立起结构的状态空间方程. 即采用连续化模型, 用空间坐标模拟时间坐标, 导出筒中筒结构协同分析的状态空间表达式, 进而用精细积分法求出问题的高精度数值解. 提出一套分析筒中筒结构协同工作的方法, 对筒中筒结构进行协同计算, 将所要解决的边值问题转化为初值问题, 进而用 Matlab 编程求解. 最后, 通过实例给予验证.

关键词: 筒中筒结构; 协同分析; 状态空间法; 精细积分; 连续化模型

中图分类号: TU 311.4; TU 973+.17

文献标识码: A

作为一种具有良好空间工作性能的结构型式, 筒中筒结构广泛的应用于高层和超高层建筑中. 但由于其外框筒复杂的受力性能, 对其进行精确分析也就变得十分困难. 将外筒等效成等代正交板, 通过楼板的作用, 与内筒协同工作, 采用连续化的方法分析筒中筒结构, 不失为一种简便而行之有效的方法^[1-4]. 由于问题的复杂性, 导出的关于侧移的控制微分方程是高阶常微分方程, 求解有一定的困难. 近年来, 现代控制理论中的状态空间方法在结构工程计算中得到一定应用. 利用多元一阶的微分方程组取代一元高阶微分方程^[5-7], 结合精细积分法求解, 可求出高精度的数值解, 使得问题大为简化. 本文将状态空间方法引入筒中筒结构的协同分析中, 建立起结构的状态空间方程, 并用精细积分法求该体系的高精度数值解.

1 状态方程的建立

作为分析的前提, 提出如下 6 点假设. (1) 各层层高及各柱柱距相同. (2) 除角柱有时截面较大外, 其他上下各层柱截面都相同. (3) 柱间的联系梁上下各层截面都相同. (4) 将柱和联系梁组成的外框筒, 用一个等代的, 匀质的正交板代替, 形成一个等代的, 四角加强的封闭筒体结构. (5) 楼板在其平面内刚度无限大, 平面外为零. (6) 结构不存在扭转现象.

对于等截面筒中筒结构, 首先根据文[1] 将外框筒连续化为等效的剪弯型实腹筒体(图 1), 有

$$I_t = \frac{4}{3}ta^2(3b + a) + 4A_0a^2. \tag{1}$$

式(1)中, $2b$ 为外筒翼缘板宽度, $2a$ 为外筒腹板长度; $A_0 = A_{c1} - A_c$, A_{c1} , A_c 分别为角柱及中柱的截面面积, A_0 为角柱加强部分的截面面积. 在考虑剪力滞后的影响后, 等代筒的层间剪切刚度^[3]为

$$K_t = 2GI_t / (a^2 G_1 h C_s). \tag{2}$$

式(2)中, G 为混凝土的剪切模量, $G_1 = 1 + \frac{2b}{a} + \frac{2A_0}{at}$; G_s 为剪力滞后影响系数, 取值范围为 1.02~ 1.06;

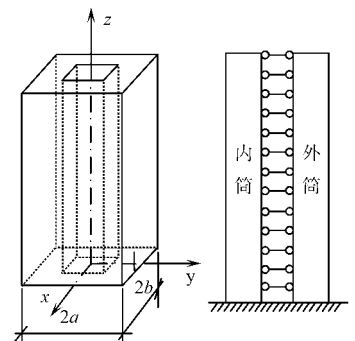


图 1 计算模型

Fig. 1 Numerical model

收稿日期: 2008- 05- 19

作者简介: 钟芳林(1963-), 男, 副教授, 主要从事结构设计的研究. E-mail: zfl.007@ 163.com.

基金项目: 河北省自然科学基金资助项目(E200600630); 河北省教育厅自然科学基金资助项目(2002146)

t 为等效板厚度, $t = A_{c,1}/d$, $t_i = A_{c,1,i}/d$; h 为楼层高度.

根据假定(5), 楼板可视为刚性链杆, 并将其作用沿结构高度连续化使得内外筒之间实现水平荷载作用下的变形协调, 内外筒则分别看作两根竖向悬臂梁, 得到计算简图如图 2 所示. 内筒仅考虑弯曲变形, 外筒则考虑弯曲变形、剪切变形及剪力滞后的影响.

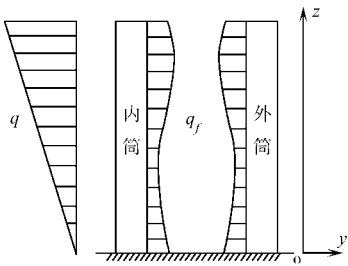


图 2 计算简图

Fig. 2 Calculation diagram

针对外筒, 对弯曲变形, 有 $\frac{dy_{f,1}}{dz} = \theta_{f,1}$, $\frac{d\theta_{f,1}}{dz} = -\frac{1}{E_f I_f} M_f$, $\frac{dM_f}{dz} = Q_f$, $\frac{dQ_f}{dz} = -q + q_n$; 而对剪切变形, 有 $\frac{dy_{f,2}}{dz} = \theta_{f,2}$, $\theta_{f,2} = \frac{1}{C_f} Q_f$. 其中, $y_{f,1}$ 和 $y_{f,2}$ 分别为外筒弯曲和剪切变形引起的侧移, M_f 和 Q_f 分别为外筒的弯矩和剪力, q 为作用在筒中筒结构上的水平荷载, q_n 为内筒分担的水平荷载, $E_f I_f$ 为外筒的抗弯刚度, C_f 为外筒的抗推刚度. 考虑剪力滞后的影响后, $C_f = K_f h$. 对于内筒只计弯曲变形, 于是有

$$\frac{dy_w}{dz} = \theta_w, \quad \frac{d\theta_w}{dz} = -\frac{1}{E_w I_w} M_w, \quad \frac{dM_w}{dz} = Q_w, \quad \frac{dQ_w}{dz} = -q_w. \tag{3}$$

式(3)中, y_w , M_w , Q_w 和 $E_w I_w$ 分别为内筒的侧移、弯矩、剪力和抗弯刚度. 因为内外筒由刚性链杆相连, 故由变形协调条件: $y = y_w = y_{f,1} + y_{f,2}$, $\theta = \theta_w = \theta_{f,1} + \theta_{f,2}$. 由平衡条件 $M = M_w + M_f$, $Q = Q_w + Q_f$, 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= \theta, \quad \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{E_w I_w} M_w, \quad \frac{dM_w}{dz} = Q_w, \quad \frac{dM}{dz} = Q, \\ \frac{dQ_w}{dz} &= -\frac{C_f}{E_f I_f} M_f + \frac{C_f(E_f I_f + E_w I_w)}{E_f E_w I_f I_w} M_w - q, \quad \frac{dQ}{dz} = -q. \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

令 $\xi = \frac{z}{H}$, $\delta = \frac{D^*}{E_w I_w}$, H 为结构总高, D^* 为内筒指定截面上的抗弯刚度, 一般可取结构底面内筒的抗弯刚度. 再令 $x_1 = \frac{y}{H}$, $x_2 = \theta$, $x_3 = M_w H / D^*$, $x_4 = Q_w H^2 / D^*$, $x_5 = M H / D^*$, $x_6 = Q H^2 / D^*$, $\alpha^2 =$

$$\frac{C_f(E_w I_w + E_f I_f) H^2}{E_w I_w E_f I_f}, \quad \gamma = \frac{C_f H^2}{E_f I_f}, \quad \text{并记 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T, \quad X =$$

$[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6]^T$, $u = \frac{u H^3}{E_w I_w}$. 于是, 式(4)可改写成为

$$X' = AX + Bu. \tag{5}$$

此即所求的筒中筒结构协同分析的状态空间表达式.

2 状态空间表达式的求解

根据常微分方程理论, 式(5)的解为

$$X = e^{A\xi} X_0 + \int_0^\xi e^{A(\xi-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \tag{6}$$

为求得区间 $[0, 1]$ 内各个点的状态向量, 把区间等分, 每等分长记为 η , 得到 $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = \eta$, ..., $\xi_k = k\eta$, ..., 于是有

$$X_k = X(k\eta) = X_k X_{k-1}, \quad T_k = \begin{bmatrix} e^{A\eta} & \int_{k-1}^k e^{A(z_k-\tau)} f(\tau) d\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

式(7)中, T_k 为扩展的状态转移矩阵, W 为扩展的状态向量. 问题的关键是状态转移矩阵 $T = e^{A\eta}$ 及特解

$\int_{z_{k-1}}^k e^{A(z_k - \tau)} Bu(\tau) d\tau$ 的计算, 逐步积分公式成为递推公式. 即

$$X_1 = T_1 X_0, \quad X_2 = T_2 X_1, \quad \dots, \quad X_k = T_k X_{k-1}, \quad \dots$$

2.1 指数矩阵的精细积分法

$e^{A\tau}$ 为矩阵指数函数, 意义与普通的指数函数表达式一样, 可用泰勒级数展开. 用泰勒级数法计算指数矩阵, 需要取足够多的项才能达到计算的精度, 而当 $A\tau$ 的范数比较大时, 尤其困难.

精细积分法采用指数函数的加法定理 $e^{A\tau} = e^{(A\tau/m)^m}$. 其中, m 为任意正整数, 可选用 $m = 2^N$. 当 $N = 20$ 时, $m = 1\,048\,576$. 利用尺度因子 m 作用, 先计算 $e^{(A\tau/m)}$, 再经过 m 次自乘, 解决上述问题. 其核心思想是, 由于 τ 本来是不大的区段, τ/m 是非常小的一个区段. 在这个区段上, 泰勒级数的前 5 项展开式已足够了. 取

$$e^{A\tau} = I_n + (A\tau) + \frac{(A\tau)^2}{2} + \frac{(A\tau)^3}{3!} + \frac{(A\tau)^4}{4!} = I_n + T_a, \tag{8}$$

式(8)中, $T_a = (A\tau) + (A\tau)^2/[I_n + (A\tau)/3 + (A\tau)^2/12]/2$. 此时, 指数矩阵 $T = e^{A\tau}$ 与单位矩阵 I_n 相差不多. 计算中关键是, 指数矩阵的存储只能是 T_a , 而不是 $I_n + T_a$, 因为 T_a 很小. 当它与单位阵 I_n 相加时就成为尾数, 在计算机舍入操作中将丧失, 可作分解为

$$T = (I_n + T_a)^{2^N} = (I_n + T_a)^{2^{(N-1)}} \times (I_n + T_a)^{2^{(N-1)}}. \tag{9}$$

在计算机中相当的语句为

$$\text{for}(\text{iter} = 0; \text{iter} < N; \text{iter}++) \quad T_a = 2T_a + T_a \times T_a.$$

当以上语句循环结束后, 再执行 $T = I_n + T_a$. 以上就是指数矩阵的精细积分法^[8-10].

2.2 特解的计算

计算特解时, 可把 $u(\tau)$ 中的连续函数 $q(\xi)$ 在每一微段中静力等效为集中力 p_k . 则

$$q(\xi) = p_k \delta(\xi - \xi_k). \tag{10}$$

式(10)中, $\delta(\xi - \xi_k)$ 为脉冲函数, 其性质为

$$\int_a^b f(\xi) \delta(\xi - \xi_k) d\xi = \begin{cases} f(\xi_k), & a \leq \xi_k \leq b, \\ 0, & b \leq \xi_k, \quad a \geq \xi_k. \end{cases} \tag{11}$$

根据上述性质, 得到

$$\int_{z_{k-1}}^k e^{A(z_j - \tau)} Bu(\tau) d\tau = \left[0, 0, 0, -\frac{p_k H^3}{D^*}, 0, -\frac{p_k H^3}{D^*} \right]^T. \tag{12}$$

2.3 总体扩展状态转移矩阵的计算

由以上推导可得到 T_k , 并可递推得 $X_n = T_n \dots T_k T_{k-1} \dots T_1 \tilde{W}_0 = TX_0$. 其中, $T = T_n T_{n-1} \dots T_1$, 称为总体扩展状态转移矩阵 $T = [t_{i,j}]_{7 \times 7}$.

2.4 初始参数的确定

筒中筒结构协同分析问题属两端边值问题而非初值问题, X_0 不能直接获得, 需要根据两端的边界条件才能确定. 两端边界条件分别是在 $\xi = 1$ (即 $z = H$) 处, $Q = 0, M = 0, M_w = 0$, x_6, x_5, x_3 的值均为 0; 在 $\xi = 0$ (即 $z = 0$) 处, $\gamma, \theta, \theta_{t1}$ 均为 0. 外筒底部由弯曲引起的角变形为零, 其角变形完全由剪切产生, 故有 $\theta_{t2} = \theta - \theta_{t1} = 0$, 同时, 可得出 $Q_t = 0$, 因而 $Q_w = Q$. 于是, 可得到该处的 x_1, x_2, x_4 满足 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = x_6$. 利用上述边界条件及总体扩展状态转移矩阵, 可知

$$\begin{bmatrix} t_{3,3} + t_{3,6} & t_{3,4} & t_{3,5} \\ t_{4,3} + t_{4,6} & t_{4,4} & t_{4,5} \\ t_{5,3} + t_{5,6} & t_{5,4} & t_{5,5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} t_{3,7} \\ t_{4,7} \\ t_{5,7} \end{Bmatrix} = 0. \tag{13}$$

由式(13)即可求出 x_3, x_4 及 x_5 , 进而确定全部初值 X_0 . 然后, 由递推公式(9)求得 X_k , 也就求得了筒体内的各项内力及横截面的转角与挠度.

对于等截面筒中筒结构, 系统矩阵 A 在区间 $[0, 1]$ 上是常数, 因此只需计算一次状态转移矩阵 T , 就可以完成全部计算, 计算效率较高. 对于阶形变截面筒中筒结构, 系统矩阵 A 随结构截面变化而变化, 状态转移矩阵 T 需重复计算, 计算次数视截面变化规律而定, 其他计算过程与等截面结构相同.

3 计算实例

算例选自文[1] 中的筒中筒结构体系,除底层层高为 3.9 m 外,其余层高均为 3.6 m,共 21 层,总高度为 75.9 m.混凝土弹性模量为 30 GPa,内筒惯性矩为 251.795 m⁴,外筒折算惯性矩为 1 176.24 m⁴,其抗推刚度为 1.118 22 GN,结构受倒三角水平布分荷载作用,顶部荷载集度为 234.6 kN • m⁻¹.

利用状态空间法计算的结果,如表 1 所示.文[1]得到顶部侧移 72.23 mm,内筒底部弯矩- 375.145 MN • m⁻¹,由此可见本文的方法可以得到的结果令人满意.

表 1 计算结果

Tab. 1 Calculation results

h	y/mm	$M_w/\text{MN} \cdot \text{m}^{-1}$	Q_w/MN	$M_t/\text{MN} \cdot \text{m}^{-1}$	Q_t/MN
75.9	72.224	0	- 1.285 6	0	1.285 6
50.7	40.849	- 33.802 0	3.656 3	- 32.469 0	1.274 2
25.5	13.033	- 170.440 0	6.941 2	- 61.608 0	0.957 0
0	0	- 375.110 0	8.903 1	- 75.431 0	0

4 结束语

本文将现代控制理论中的状态空间方法引入筒中筒结构的协同分析中,建立起形式简单的状态空间方程.将所要解决的边值问题转化为初值问题,进而用 Matlab 编程求解.此外,通过一定的变化,该方法还可方便的应用于变截面筒中筒结构的分析中.

参考文献:

[1] 朱幼麟.筒中筒结构的简化计算[J].建筑结构学报,1984, 5(2):9-21.
[2] 巴荣光.筒中筒结构的简化分析[J].建筑结构学报,1993, 14(1):72-77.
[3] 包世华.新编高层建筑结构[M].北京:中国水利水电出版社,2001.
[4] 陈加猛,梁启智,张晓虹.高层筒中筒结构的二阶分析[J].华南理工大学学报:自然科学版,1998, 26(8):78-85.
[5] 胡启平,张 华.框架-剪力墙-薄壁筒斜交结构分析的状态空间法[J].工程力学,2006, 23(4):125-129.
[6] 胡启平,张 华.框架结构空间分析的状态空间法[J].河北建筑科技学院学报,2004, 21(4):36-38.
[7] 胡启平,高洪俊,凌明俊.筒中筒结构动力特性分析的状态空间法[J].建筑科学,2007, 23(22):1-4.
[8] 钟万勰.应用力学对偶体系[M].北京:科学出版社,2002.
[9] 钟万勰.应用力学的辛数学方法[M].北京:高等教育出版社,2006.
[10] 胡启平,李张苗,侯瑞珀.铁摩辛柯梁弯曲问题的对偶求解体系[J].河北建筑科技学院学报,2006,23(3):1-2, 19.

State Space Metod for Cooperating Analysis of Tube-in-Tube Structure

ZHONG Fang-lin¹, HU Qi-ping²

(1. Departmont of Civil Engineerin, Handan Polyetechnil College, Handan 056001, China;
2. College of Civil Engineering, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China)

Abstract: The state space method in modern control theory is used for the cooperative analysis of the tube in tube structure. Based on the assumption of the structure continuum, the state space equations are established. The high accuracy numerical solutions of the equations are obtained using the precise integration method. A new simple and convenient method for the cooperative analysis of the tube in tube structures with variable cross section is proposed. The established computer program can analyze preliminarily these structures, and can also determine the rational plan of the structures and design the structures, which is examined by the practical engineering.

Keywords: tube in tube structure; cooperative analysis; state space method; precise integration; continuum model

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 郑亚青)