

文章编号: 1000-5013(2008)03-0468-04

# 广义 Pochhammer-Chree 方程的多辛 Fourier 拟谱格式及孤立波试验

黄浪扬

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 通过变换, 将广义 Pochhammer-Chree (PC) 方程转化为多辛形式的方程组. 在空间方向利用 Fourier 拟谱方法, 在时间方向利用 Euler 中点格式进行离散此方程组, 得到广义 PC 方程的多辛 Fourier 拟谱格式及其离散多辛守恒律. 孤立波的数值模拟试验验证所构造格式的有效性, 以及广义 PC 方程的孤立波相互作用是非弹性的事实.

关键词: 广义 PC 方程; 多辛方程组; Fourier 拟谱格式; 多辛守恒律; 孤立波试验

中图分类号: O 241.82

文献标识码: A

对于 Hamilton 系统, Bridges 与 Reich 提出多辛算法<sup>[1-3]</sup>之后, 又提出了 Fourier 空间上的多辛谱方法<sup>[4]</sup>. 秦孟兆等<sup>[5]</sup>将此思想方法进行推广, 提出了物理空间上的多辛谱方法. 考虑满足周期边界条件的广义 PC 方程<sup>[6]</sup>:  $u_{tt} - u_{xxx} - u_{xx} - \frac{1}{p}(u^p)_{xx} = 0$ . 其中,  $u(x, t)$  为纵位移,  $t$  为时间,  $x$  为质点的横坐标. 它是在一定限制如非压缩或接近条件下, 描述弹性杆的纵向形变波传播的模型方程. 该方程在离子声波方面应用较为广泛, 引起许多学者的兴趣. 文[6]指出了当  $p = 3$  时纵向形变波的孤立波相互作用是非弹性的, 因此这种孤立波无孤立子. 本文在空间方向用 Fourier 拟谱方法, 离散广义 PC 方程的多辛方程组, 然后在时间方向用 Euler 中点格式对半离散方程进行数值求解, 得到了广义 PC 方程的多辛 Fourier 拟谱格式, 同时导出其离散多辛守恒律.

## 1 广义 PC 方程的多辛方程组形式

根据 Bridges 和 Reich 引入的多辛积分的概念<sup>[1-3]</sup>, 对满足周期边界条件的广义 PC 方程引入新变量  $u_t = v = w_x$ ,  $u_x = q_x$ , 可将其改写为如下的多辛方程组形式. 即

$$M\partial_t z + K\partial_x z = \nabla_z S(z), \quad z \in \mathbf{R}^4, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2. \quad (1)$$

式中,  $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $z = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ q \end{bmatrix}$ . Hamilton 函数  $S(z) = \frac{1}{2}(v^2 + w^2 - q^2) +$

$\frac{1}{p(p+1)}u^{p+1}$ ,  $\nabla_z$  表示光滑函数  $S: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$  的梯度算子. 多辛方程组(1)具有重要的多辛守恒律  $\frac{\partial}{\partial t}(du \wedge dw - du \wedge dv) + \frac{\partial}{\partial x}(dq \wedge du) = 0$ , 其中,  $\wedge$  为外积算子.

求解多辛方程组(1)的数值方法可表示为

$$M\partial_t^{j,n} z_{j,n} + K\partial_x^{j,n} z_{j,n} = \nabla_z S(z_{j,n}). \quad (2)$$

收稿日期: 2007-11-09

作者简介: 黄浪扬(1974), 男, 讲师, 主要从事偏微分方程数值解法的研究. E-mail: hly6@163.com.

基金项目: 福建省自然科学基金计划资助项目(Z0511029)

式(2)中,  $z_{j,n} = z(x_j, t_n)$ ,  $\partial_t^{j,n}, \partial_x^{j,n}$  分别为算子  $\partial_t, \partial_x$  的离散格式(2)应满足如下的离散多辛守恒律  $\partial_t^{j,n} \omega_{j,n} + \partial_x^{j,n} K_{j,n} = 0$ . 这里,  $\omega = \frac{1}{2} dz \wedge M dz, K = \frac{1}{2} dz \wedge K dz$ .

## 2 多辛 Fourier 拟谱格式

多辛 Fourier 拟谱格式就是将式(2)中的  $\partial_x^{j,n}$  取为 Fourier 拟谱算子, 再用 Euler 中点方法对  $\partial_t^{j,n}$  进行数值求解. 先简单介绍将 Fourier 拟谱方法应用于多辛系统的主要结果<sup>[4-5]</sup>.

假设  $z(x, t)$  是以  $L$  为周期的光滑函数组,  $z(x, t)$  在配置点  $(x_j = \frac{L}{N}j, j = 0, 1, \dots, N-1, \text{ 其中 } N \text{ 为偶数})$  处的插值近似用  $INz(x, t)$  表示, 且具如下形式

$$INz(x, t) = \sum_{j=0}^{N-1} z_j \left( \frac{1}{N} \sum_{l=-N/2}^{N/2} \frac{1}{cl} e^{i\mu(x-x_j)} \right) = \sum_{l=-N/2}^{N/2} \left( \frac{1}{Ncl} \sum_{j=0}^{N-1} z_j e^{i\mu x_j} \right) e^{i\mu x}. \tag{3}$$

式中,  $z_j = z(x_j, t), cl = 1(l \neq \frac{N}{2}), c_{-\frac{N}{2}} = c_{\frac{N}{2}} = 2, \mu = \frac{2\pi}{L}$ . 若记  $g_j(x) = \frac{1}{N} \sum_{l=-N/2}^{N/2} \frac{1}{cl} e^{i\mu(x-x_j)}$ , 则  $g_j(x_k) = \delta_{jk}$ , 从而有  $INz(x_j, t) = z_j, j = 0, 1, \dots, N-1$ .

为了得到关于  $z_j$  的方程, 将式(3)代入多辛方程组(1), 并要求方程组(1)在配置点精确成立, 即  $[M(INz(x, t))_t + K(INz(x, t))_x] |_{x=x_j} = \nabla z S(z_j), j = 0, 1, \dots, N-1$ . (4)

这里关键是用  $z_j$  来表示偏导数  $\partial^k INz(x, t) / \partial x^k$  在配置点  $x_j$  处的值. 为解决此问题, 对式(3)求微分, 并计算它在点  $x_j$  处的值, 得

$$\frac{\partial^k INz(x_j, t)}{\partial x^k} = \sum_{n=0}^{N-1} z_n \frac{d^k g_n(x_j)}{dx^k} = (D_k z)_j, \tag{5}$$

其中,  $z = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1})^T, D_k$  为  $N \times N$  矩阵, 称之为  $k$  阶谱微分矩阵,  $(D_k)_{j,n} = \frac{d^k g_n(x_j)}{dx^k}$ . 通过计算可以得到<sup>[5]</sup>

$$(D_1)_{j,n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu (-1)^{j+n} \cot(\mu \frac{x_j - x_n}{2}), & j \neq n, \\ 0, & j = n. \end{cases} \tag{6}$$

$$(D_2)_{j,n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu^2 (-1)^{j+n+1} \left[ \frac{1}{\sin^2(\mu \frac{x_j - x_n}{2})} \right], & j \neq n, \\ -\mu^2 \frac{N^2 + 2}{12}, & j = n. \end{cases} \tag{7}$$

现将广义 PC 方程的多辛方程组(1)改写为如下的分量形式:

$$w_t - v_t - q_x - \frac{1}{p} u^p = 0, \quad u_t - v = 0, \quad -u_t + w_{xx} = 0, \quad u_x - q_{xx} = 0. \tag{8}$$

对式(8)在时间方向不离散, 在空间方向用 Fourier 拟谱方法进行离散, 则利用谱微分矩阵, 可得广义 PC 方程的 Fourier 拟谱半离散格式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} w_j - \frac{d}{dt} v_j - (D_1 q)_j - \frac{1}{p} (u_j)^p &= 0, & \frac{d}{dt} u_j - v_j &= 0, \\ -\frac{d}{dt} u_j + (D_2 w)_j &= 0, & (D_1 u)_j - (D_2 q)_j &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

其中,  $j = 0, 1, \dots, N-1$ . 然后, 在时间方向用 Euler 中点格式对 Fourier 拟谱半离散格式(9)进行离散, 得到广义 PC 方程的多辛 Fourier 拟谱离散格式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\tau} - \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} - (D_1 q^{n+\frac{1}{2}})_j - \frac{1}{p} (u_j^{n+\frac{1}{2}})^p &= 0, & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - v_j^{n+\frac{1}{2}} &= 0, \\ -\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + (D_2 w^{n+\frac{1}{2}})_j &= 0, & (D_1 u^{n+\frac{1}{2}})_j - (D_2 q^{n+\frac{1}{2}})_j &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

式中,  $j = 0, 1, \dots, N-1, \tau$  为时间步长,  $u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u^n + u^{n+1}), u_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_j^{n+1})$  等.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

命题<sup>[5]</sup> 多辛 Fourier 拟谱格式(10)具有  $N$  个全离散的多辛守恒律, 有

$$\frac{\omega_j^{n+1} - \omega_j^n}{\tau} + \sum_{k=0}^{N-1} (D_1)_{j,k} \kappa_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \tag{11}$$

式(11)中,  $\omega_j^n = \frac{1}{2} dz_j^n \wedge M dz_j^n$ ,  $\kappa_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [ dz_j^{n+\frac{1}{2}} \wedge K dz_k^{n+\frac{1}{2}} + dz_k^{n+\frac{1}{2}} \wedge K dz_j^{n+\frac{1}{2}} ]$ .

于是, 对多辛 Fourier 拟谱格式(10)的全离散多辛守恒律为

$$\omega_j^n = du_j^n \wedge dw_j^n - du_j^n \wedge dv_j^n, \quad \kappa_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [ dq_j^{n+\frac{1}{2}} \wedge du_k^{n+\frac{1}{2}} + dq_k^{n+\frac{1}{2}} \wedge du_j^{n+\frac{1}{2}} ].$$

在计算时, 只需知道格式(10)中  $u$  的值, 而不必知道引入的变量  $v, w, q$  的值. 若直接用格式(10)进行计算, 将耗费较多的时间和空间, 有时使问题不可求解或降低数值解的精度. 因此, 为了计算方便, 将多辛 Fourier 拟谱格式(10)消去中间变量  $v, w, q$ , 并写成矩阵形式, 通过计算可得其等价格式

$$A u^{n+1} = B u^n - A u^{n-1} + \frac{\tau^2}{2p} D_2 [ (u^{n+\frac{1}{2}})^p + (u^{n-\frac{1}{2}})^p ]. \tag{12}$$

式(12)中,  $u = (u_0, \dots, u_{N-1})^T$ ,  $A = E_N - D_2 - \frac{\tau^2}{4} (D_1)^2$ ,  $B = 2E_N - 2D_2 + \frac{\tau^2}{2} (D_1)^2$ ,  $E_N$  为  $N$  阶单位矩阵,  $D_1, D_2$  为由式(6),(7)所得到的  $N$  阶矩阵.

3 数值实验

用多辛 Fourier 拟谱格式(12)对广义 PC 方程的孤立波的长时间行为进行数值模拟. 该方程的精确孤立波解为

$$u(x, t) = [ \frac{p(p+1)(v-1)}{2} ]^{1/(p-1)} \operatorname{sech}^{2/(p-1)} [ \frac{p-1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{v}} (x - vt + \xi_0) ] \tag{13}$$

式(13)中,  $v > 1$  为波速,  $\xi_0$  为任意常数. 采取在有限区域  $I = [X_L, X_R]$  上设置人工边界和周期边界条件的方法进行数值模拟, 对人工边界  $X_L$  和  $X_R$  取得足够远, 以满足周期边界条件. 由于格式(12)是 3 层隐格式, 所以格式初始时的第 1 层和第 2 层的值均取精确值, 离散得到的非线性方程组用简单迭代方法求解.

3.1 单孤立波的模拟

在孤立波解(13)中, 令  $\xi_0 = 250$ ,  $v = 1.01$ ,  $X_L = -350$ ,  $X_R = 350$ , 时间步长  $\tau = 0.05$ , 空间步长  $h = 1$ , 并分别取  $p = 2$  及  $p = 3$  进行数值模拟. 图 1 给出了格式(12)在  $t \in [400, 500]$  (计算 10 000 步) 时, 单孤立波传播的模拟结果.

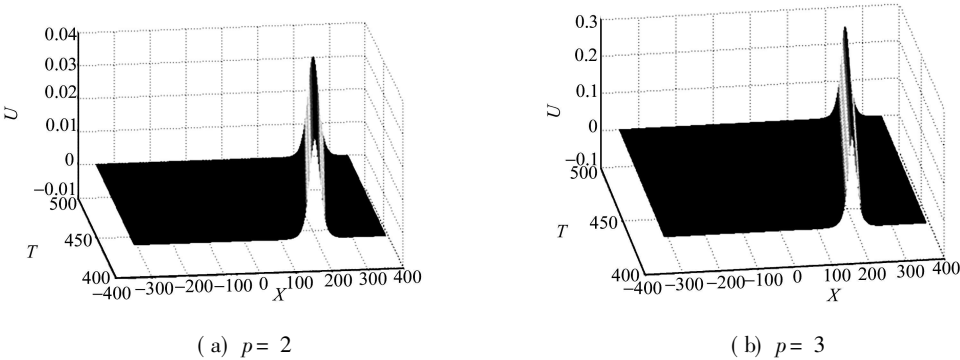


图 1 单孤立波的传播模拟结果  
Fig. 1 The propagation of solitary wave

通过以上的数值模拟试验可知, 多辛 Fourier 拟谱格式(12)能很好地模拟单孤立波运动的波形, 具有长时间的数值稳定性.

3.2 同向双孤立波的模拟

在孤立波解式(13)中, 取两个不同振幅、不同初相且均向右传播的双孤立波进行数值模拟试验. 令  $X_L = -300$ ,  $X_R = 300$ , 时间步长  $\tau = 0.05$ , 空间步长  $h = 1$ , 并分别取  $\xi_0 = 200, v = 16$ ;  $\xi_0 = 170, v = 1.1$ . 下

面对  $p = 2, p = 3$  两种情况进行模拟. 图 2 给出了由格式 (12) 模拟得到的不同时刻的双孤立波传播的模拟结果. 由图 2 可知, 多辛 Fourier 拟谱格式 (12) 在模拟同向双孤立波传播时出现较大的振荡现象, 验证了广义 PC 方程的孤立波相互作用是非弹性的, 这种孤立波无孤立子的事实.

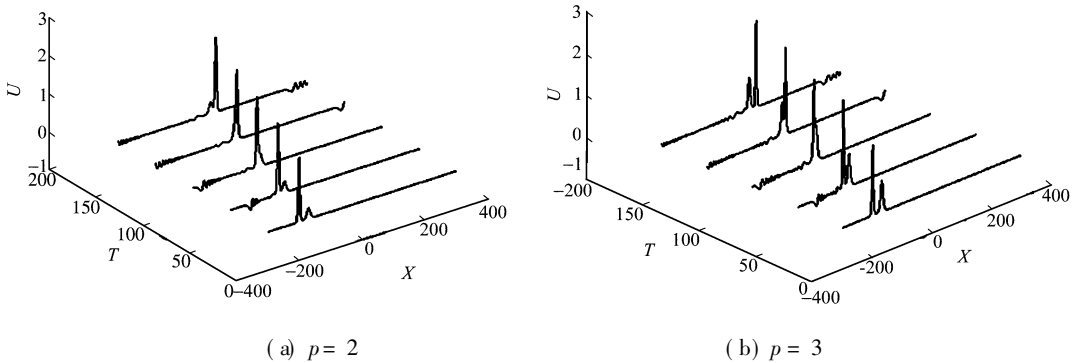


图 2 双孤立波的碰撞过程

Fig. 2 The collision process of the two solitary waves

对于  $p$  取其他值的情况, 结果一样, 在此不再一一列举. 由此可见, 本文所构造的多辛 Fourier 拟谱格式是有效的, 数值模拟结果与理论相符.

#### 参考文献:

- [1] BRIDGES T J, REICH S. Multi symplectic integrators: Numerical schemes for Hamiltonian PDEs that conserve symplecticity [J]. Physics Letter A, 2001, 284(4-5): 184-193.
- [2] BRIDGES T J. Multi symplectic structures and wave propagation [J]. Math Proc Cam Phil Soc, 1997, 121: 147-190.
- [3] REICH S. Multi symplectic Runge Kutta methods for Hamiltonian wave equations [J]. J Comput Phys, 2000, 157(5): 473-499.
- [4] BRIDGES T J, REICH S. Multi symplectic spectral discretizations for the Zakharov Kuznetsov and shallow water equations [J]. Physica D, 2001, 152: 491-504.
- [5] CHEN Jing bo, QIN Meng zhao. Multi symplectic Fourier pseudospectral method for the nonlinear Schrödinger equation [J]. Electron Trans Numer Anal, 2001, 12: 193-204.
- [6] BOGOLUBSKY L L. Some examples of inelastic solution interaction [J]. Comput Phys Commun, 1977, 13(2): 149-155.

## Multi-Symplectic Fourier Pseudo-Spectral Scheme for Generalized Pochhammer-Chree Equation and Solitary Wave Experiments

HUANG Lang-yang

(School of Mathematics Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** The multi symplectic systems for the generalized Pochhammer-Chree (PC) equation are obtained by transformation. A multi symplectic Fourier pseudo-spectral scheme are constructed by means of a Fourier pseudo-spectral method in space and an Euler mid-point method in time. At the same time, we get the full discrete multi symplectic conservation laws for the scheme. Numerical experiments show that the scheme constructed in this paper is effective, and indicate that the interaction of these solitary waves is inelastic.

**Keywords:** generalized PC equation; multi symplectic systems; Fourier pseudo-spectral scheme; multi symplectic conservation laws; solitary wave experiments

(责任编辑: 黄仲一 英文审校: 张金顺, 黄心中)