第29卷 第3期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 29 No. 3
2008年7月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 2008

文章编号: 1000-5013(2008)03-0464-04

Newton 迭代法收敛性

陈恒新

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 给出一种新的, 具有较大收敛域的 Newton 迭代法和 Newton 下山法收敛性定理, 以及误差估计式. 它不要求函数 $f(x)$ 存在二阶导数, 只需要函数 $f(x)$ 存在一阶导数, 便可根据文中定理对其收敛性进行判别, 弥补了以往相关定理的不足, 并通过数值例子给予验证.

关键词: Newton 迭代法; Newton 下山法; 收敛性; 判别定理

中图分类号: O 241.6　　文献标识码: A

用 Newton 迭代法 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $k=0,1,2,\cdots$, 求方程 $f(x)=0$ 的根是一种行之有效的算法. 但一般情况下, Newton 法只具有局部收敛性[1], 即它对初值取法较为苛刻. 文[2]给出了在 $[a,b]$ 区间上的一种 Newton 迭代法收敛定理. 该定理不仅要求函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶导数, 且要求其二阶导数 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 这在实际应用中有很大的不便. 如果遇到函数 $f(x)$ 的二阶导数不存在, 或 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上变号, 则该定理便不能使用[3-5]. 为此, 本文提出一种新的 Newton 迭代法收敛性定理, 以及相应的 Newton 下山法收敛性定理.

1 定理证明

定理 1 设函数 $f(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 上存在一阶导数且满足如下 3 个条件. (Ⅰ) $f(a)f(b)<0$. (Ⅱ) 存在正数 m, M, 其中 $m\leqslant M$, 且 $2m>M$, 使(a) $0<m\leqslant f'(x)\leqslant M$ (或(b) $-M\leqslant f'(x)\leqslant -m<0$), $x\in[a,b]$. (Ⅲ) 对任意满足初值条件, $x_0\in[a,b]$ 且 $f(\frac{x_0+a}{2})\leqslant 0$, $f(\frac{x_0+b}{2})\geqslant 0$ (对(b)为 $f(\frac{x_0+a}{2})\geqslant 0$, $f(\frac{x_0+b}{2})\leqslant 0$) 的初始近似值 x_0. 由 Newton 迭代式产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛于方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上的唯一解 x^*, 并且有误差估计式 $|x_k-x^*|\leqslant(\frac{M}{m}-1)^k|x_0-x^*|\leqslant(\frac{M}{m}-1)^k(b-a)$. 为说明定理 1 的初值条件(Ⅲ)对初值 x_0 的要求并不苛刻, 有如下引理.

引理 当 $x^*\leqslant(a+b)/2$, 定理 1 的初值条件(Ⅲ)等价于 $a\leqslant x_0\leqslant x^*+(x^*-a)$; 或当 $x^*\geqslant(a+b)/2$, $x^*-(b-x^*)\leqslant x_0\leqslant b$.

证明 由于情况(b)可化为情况(a)(详见定理 1 证明过程), 所以仅证明情况(a). 由定理 1 条件(Ⅰ), (Ⅱ)可知, 初值条件(Ⅲ)中 $f(\frac{x_0+a}{2})\leqslant 0$, $f(\frac{x_0+b}{2})\geqslant 0$ 等价于 $\frac{x_0+a}{2}\leqslant x^*$, $\frac{x_0+b}{2}\geqslant x^*$, 即

$$x^*-(b-x^*)\leqslant x_0\leqslant x^*+(x^*-a), \tag{1}$$

又因为 $a\leqslant x_0\leqslant b$, 则当 $x^*\geqslant(a+b)/2$ 时, 有 $x^*-a\geqslant b-x^*$, 从而有 $x^*+(x^*-a)\geqslant x^*+(b-x^*)=b$, $x^*-(b-x^*)\geqslant x^*-(x^*-a)=a$. 即式(1)可写为 $x^*-(b-x^*)\leqslant x_0\leqslant b$. 当 $x^*\leqslant(b+a)/2$ 时, 有 $x^*-a\leqslant b-x^*$, 从而有 $x^*-(b-x^*)\leqslant x^*-(x^*-a)=a$, $x^*+(x^*-a)\leqslant x^*+(b-x^*)=b$. 即式(1)

收稿日期: 2007-11-26
作者简介: 陈恒新(1956-), 男, 副教授, 主要从事数值代数和矩阵计算的研究. E-mail: chenhx@hqu.edu.cn.
基金项目: 福建省自然科学基金计划资助项目(S0650018, 2006J0212)

可写为 $a \leqslant x_0 \leqslant x^* + (x^* - a)$. 即当 $x^* \leqslant (a+b)/2$, 定理 1 的初值条件(Ⅲ)等价于 $a \leqslant x_0 \leqslant x^* + (x^* - a)$; 或当 $x^* \geqslant (a+b)/2$, $x^* - (b - x^*) \leqslant x_0 \leqslant b$. 可见在定理 1 初值条件(Ⅲ)下, 初值 x_0 的选取范围仍是很广泛的、也就是说, 满足条件(Ⅲ)的 x_0 是很容易在 $[a, b]$ 中取得的, 详见文中数值例子.

定理1证明　由于对情况(b)只要令 $F(x) = -f(x)$, 则由 $-M \leqslant f'(x) \leqslant -m < 0$ 便有 $0 < m \leqslant F(x) \leqslant M$, 及 $F(a)F(b) = f(a)f(b) < 0$ 和 $F(\frac{x_0+a}{2}) = -f(\frac{x_0+a}{2}) \leqslant 0$, $F(\frac{x_0+b}{2}) = -f(\frac{x_0+b}{2}) \geqslant 0$. (因 $f(\frac{x_0+a}{2}) \geqslant 0, f(\frac{x_0+b}{2}) \leqslant 0$). 于是, 条件(Ⅱ)中(b)便化为情况(a), 因此, 只需证明情况(a)便可.

已知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 由条件(Ⅰ)知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的根存在, 又由条件(Ⅱ)知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是严格递增的. 因此, $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 上的根 x^* 存在且唯一.

首先, 由条件(Ⅰ), (Ⅱ)可知, 对任意满足(Ⅲ)的初值 x_0 有 $\frac{x_0+a}{2} \leqslant x^*$, $\frac{x_0+b}{2} \geqslant x^*$, 即 $a \leqslant 2x^* - x_0 \leqslant b$. 由条件(Ⅰ), (Ⅱ)可知, 若 $x_0 \in [a, x^*]$, 有 $x_0 \leqslant x^*$, 因此 $f(x_0) \leqslant 0$, 且 $f'(x_0) > 0$. 由 Newton 迭代式有 $x_1 \geqslant x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \geqslant x_0$. 又 $x_1 \geqslant x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 + \frac{f(x^*) - f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 + \frac{f'(\xi_0)(x^* - x_0)}{f'(x_0)}$, $\xi \in (x_0, x^*)$. 因此有 $\frac{f'(\xi_0)}{f'(x_0)} \leqslant \frac{M}{m} < \frac{2m}{m} = 2$, 所以 $x_1 = x_0 + \frac{f'(\xi_0)}{f'(x_0)}(x^* - x_0) \leqslant x_0 + 2(x^* - x_0) = 2x^* - x_0$. 即

$$x_0 \leqslant x_1 \leqslant 2x^* - x_0, \tag{2}$$

从而有 $x_1 \in [a, b]$.

同理, 若 $x_0 \in [x^*, b]$, 有 $x_0 \geqslant x^*$, 因此 $f(x_0) \geqslant 0, f'(x_0) > 0$. 由 Newton 迭代式便有 $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leqslant x_0$, 又 $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0) - f(x^*)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f'(\xi_0)(x_0 - x^*)}{f'(x_0)}$, $\xi_0 \in (x^*, x_0)$, 因此 $\frac{f'(\xi_0)}{f'(x_0)} \leqslant \frac{M}{m} < 2$, 所以 $x_1 \geqslant x_0 - 2(x_0 - x^*) = 2x^* - x_0$ 即

$$2x^* - x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_0, \tag{3}$$

从而有 $x_1 \in [a, b]$. 由式(2), (3)有, 当 $x_0 \in [a, x^*]$ 时, $x_1 \in [x_0, x^*]$ 或 $x_1 \in [x^*, 2x^* - x_0]$; 当 $x_0 \in [x^*, b]$ 时, $x_1 \in [2x^* - x_0, x^*]$ 或 $x_1 \in [x^*, x_0]$. 因为 $x_1 \in [a, b]$, 同理, 利用公式 $x_2 \geqslant x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, 当 $x_1 \in [a, x^*]$ 时, 有

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant 2x^* - x_1, \tag{4}$$

当 $x_1 \in [x^*, b]$ 时, 有

$$2x^* - x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_1. \tag{5}$$

因此, 当 $x_0 \in [a, x^*]$ 时, 有如下两种情况, 即

(Ⅰ) $x_1 \in [x_0, x^*] \subset [a, x^*]$, 有式(4)成立. 因 $x_1 \geqslant x_0$, $-x_1 \leqslant -x_0$, 所以有 $x_0 \leqslant x_2 \leqslant 2x^* - x_0$.

(Ⅱ) $x_1 \in [x^*, 2x^* - x_0] \subset [x^*, b]$, 有式(5)成立. 因 $x_1 \leqslant 2x^* - x_0$, 则 $x_0 \leqslant 2x^* - x_1$. 所以有 $x_0 \leqslant x_2 \leqslant 2x^* - x_0$. 于是当 $x_0 \in [a, x^*]$ 时, 恒有 $x_0 \leqslant x_2 \leqslant 2x^* - x_0$, 从而 $x_2 \in [a, b]$.

同样, 当 $x_0 \in [x^*, b]$ 时, 亦有如下两种情况.

(Ⅰ) $x_1 \in [2x^* - x_0, x^*] \subset [a, x^*]$, 有式(4)成立. 因 $x_1 \geqslant 2x^* - x_0$. 则有 $2x^* - x_1 \leqslant x_0$, 所以有 $2x^* - x_0 \leqslant x_2 \leqslant x_0$.

(Ⅱ) $x_1 \in [x^*, x_0] \subset [x^*, b]$, 有式(5)成立. 因 $x_1 \leqslant x_0$, $-x_1 \geqslant -x_0$, 所以有 $2x^* - x_0 \leqslant x_2 \leqslant x_0$. 于是, 当 $x_0 \in [x^*, b]$ 时, 恒有 $2x^* - x_0 \leqslant x_2 \leqslant x_0$, 所以有 $x_2 \in [a, b]$. 归纳假设, 当 $x_0 \in [a, x^*]$ 时, 有 $x_0 \leqslant x_k \leqslant 2x^* - x_0$; 当 $x_0 \in [x^*, b]$ 时, 有 $2x^* - x_0 \leqslant x_2 \leqslant x_0$. 于是 $x_k \in [a, b]$. 同理由 Newton 迭代式可推知, 当 $x_k \in [a, x^*]$ 时, 有 $x_k \leqslant x_{k+1} \leqslant 2x^* - x_k$; 当 $x_k \in [x^*, b]$ 时, 有 $2x^* - x_0 \leqslant x_{k+1} \leqslant x_k$.

将 x_k 看作 X_1, x_{k+1} 看作 X_2, 重复刚才的证明过程可推知, 当 $x_0 \in [a, x^*]$ 时, 有 $x_0 \leqslant x_{k+1} \leqslant 2x^* - x_0$; 当 $x_0 \in [x^*, b]$ 时, 有 $2x^* - x_0 \leqslant x_{k+1} \leqslant x_0$. 因而 $x_{k+1} \in [a, b]$.

于是, 由 Newton 迭代式产生的一切 $x_k \in [a, b]$, 从而有 $0 < m \leqslant f'(x_k) \leqslant M$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 则

$$|x_{k+1} - x^*| = \left| x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - x^* \right| = \left| x_k - x^* - \frac{f(x_k) - f(x^*)}{f'(x_k)} \right| =$$

$$\left|x_k - x^* - \frac{f'(\xi_k)(x_k - x^*)}{f'(x_k)}\right| = \left|1 - \frac{f'(\xi_k)}{f'(x_k)}\right| = |x_k - x^*|.$$

其中, ξ_k 介于 x_k, x^* 之间. 显然有 $\xi_k \in [a, b]$, 所以有 $\frac{1}{2} < \frac{m}{M} \leqslant \frac{f'(\xi_k)}{f'(x_k)} \leqslant \frac{M}{m} < 2$, 且 $\frac{m}{M} \leqslant 1$, $\frac{M}{m} \geqslant 1$. 因此

$$|x_{k+1} - x^*| \leqslant L|x_k - x^*|, \qquad L = \max\left\{\left(1 - \frac{m}{M}\right), \left(\frac{M}{m} - 1\right)\right\}.$$

由于 $(M - m)^2 \geqslant 0$, 因此 $M^2 + m^2 \geqslant 2mM$, $\frac{M}{m} + \frac{m}{M} \geqslant 2$, 即 $\frac{M}{m} - 1 \geqslant 1 - \frac{m}{M}$, 所以有 $L = \frac{M}{m} - 1 < 2 - 1 = 1$. 即得 $|x_{k+1} - x^*| \leqslant L|x_k - x^*|$, $0 \leqslant L < 1$, 反复利用此不等式, 便有 $|x_{k+1} - x^*| \leqslant L^{k+1}|x_0 - x^*|$.

令上式中 $k \to \infty$, 便得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$, 即由 Newton 迭代式产生的迭代序列收敛于 $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 上的唯一解 x^*. 并且有误差估计式 $|x_k - x^*| \leqslant (\frac{M}{m} - 1)^k |x_0 - x^*|$. 又因为 $x_0, x^* \in [a, b]$, 所以有

$$|x_k - x^*| \leqslant \left(\frac{M}{m} - 1\right)^k |x_0 - x^*| \leqslant \left(\frac{M}{m} - 1\right)^k (b - a).$$

现利用 Newton 下山法可将初值 x_0 的选取范围扩充到整个 $[a, b]$ 区间, 为此引入定理 2.

定理 2　设函数 $f(x)$ 在有限区间 $[a, b]$ 上有一阶导数, 且满足条件:

(Ⅰ) $f(a)f(b) < 0$.

(Ⅱ) 存在正数 m, M, 其中 $m \leqslant M$, 且 $2m \geqslant M$, 使得(a) $0 < m \leqslant f'(x) \leqslant M$, 或者(b) $-M \leqslant f'(x) \leqslant -m < 0$, $x \in [a, b]$. 则对任意初始近似值 $x_0 \in [a, b]$, 由 Newton 下山迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - \lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{6}$$

(下山因子 $0 < \lambda \leqslant m/M$) 产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛于方程 $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 上的唯一解 x^*. 并且有误差估计式 $|x_k - x^*| \leqslant L_\lambda^k \leqslant |x_0 - x^*| \leqslant L_\lambda^k (b - a)$, $L_\lambda = 1 - \lambda m/M$.

证明　类似定理 1, 只需证明条件(Ⅱ)中情况(a), 且和定理 1 证明完全一样, 可推知方程 $f(x) = 0$ 的解 x^* 存在并且唯一.

由条件(Ⅰ), (Ⅱ), 若 $x_0 \in [a, x^*]$, 则 $x_0 \leqslant x^*$, 有 $f(x_0) \leqslant 0$ 且 $f'(x_0) > 0$, 于是 $x_1 = x_0 - \lambda\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \geqslant x_0$ 又 $x_1 = x_0 + \lambda\frac{f(x^*) - f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 + \lambda\frac{f'(\xi_0)(x^* - x_0)}{f'(x_0)}$, $\xi_0 \in (x_0, x^*)$. 因为 $0 < \lambda\frac{f'(\xi_0)}{f'(x_0)} \leqslant \frac{m}{M} \cdot \frac{M}{m} = 1$, 所以有 $x_1 \leqslant x_0 + (x^* - x_0) = x^*$. 于是 $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x^*$, 从而 $x_1 \in [a, x^*]$. 一般地, 若 $x_k \in [a, x^*]$, 由迭代式 $x_{k+1} = x_k - \lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 可推出 $x_k \leqslant x_{k+1} \leqslant x^*$, 从而 $x_{k+1} \in [a, x^*]$.

同理, 如果 $x_0 \in [x^*, b]$, 则有 $x_0 \geqslant x^*$, 因此由条件(Ⅰ), (Ⅱ)可得 $f(x_0) \geqslant 0$, $f'(x_0) > 0$. 于是 $x_1 = x_0 - \lambda\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leqslant x_0$, $x_1 = x_0 - \lambda\frac{f(x_0) - f(x^*)}{f'(x_0)} = x_0 - \lambda\frac{f'(\xi_0)(x_0 - x^*)}{f'(x_0)} \geqslant x_0 - \frac{m}{M} \cdot \frac{M}{m}(x_0 - x^*) = x_0 - (x_0 - x^*) = x^*$. 即有 $x^* \leqslant x_1 \leqslant x_0$, 从而 $x_1 \in [x^*, b]$. 一般地, 若 $x_k \in [x^*, b]$, 则由式(6)可推出 $x^* \leqslant x_{k+1} \leqslant x_k$, 从而 $x_{k+1} \in [x^*, b]$.

因此, 对任意初值 $x_0 \in [a, b]$, 由式(6)产生之一切 $x_k \in [a, b]$, 则

$$|x_{k+1} - x^*| = \left|x_k - \lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - x^*\right| = \left|x_k - x^* - \lambda\frac{f(x_k) - f(x^*)}{f'(x_k)}\right| =$$

$$\left|x_k - x^* - \lambda\frac{f'(\xi_k)}{f'(x_k)}(x_k - x^*)\right| = \left|1 - \lambda\frac{f'(\xi_k)}{f'(x_k)}\right| \cdot |x_k - x^*|.$$

其中, ξ_k 在 x^* 和 x_k 之间. 因此有 $\frac{m}{M} \leqslant \frac{f'(\xi_k)}{f'(x_k)} \leqslant \frac{M}{m}$, $\lambda\frac{f'(\xi_k)}{f'(x_k)} - 1 \leqslant \frac{m}{M} \cdot \frac{M}{m} - 1 = 1 - 1 = 0$, $1 - \lambda\frac{f'(\xi_k)}{f'(x_k)} \geqslant 1 - \frac{m}{M} \cdot \frac{M}{m} = 0$, 故 $\left|1 - \lambda\frac{f'(\xi_k)}{f'(x_k)}\right| = 1 - \lambda\frac{f'(\xi_k)}{f'(x_k)} \leqslant 1 - \lambda\frac{m}{M} = L_\lambda$. 所以有 $|x_{k+1} - x^*| \leqslant L_\lambda|x_k - x^*|$. 反复利用此不等式, 便有 $|x_{k+1} - x^*| \leqslant L_\lambda^{k+1}|x_0 - x^*|$.

由于 $0 < \lambda \leqslant \frac{m}{M}$, $\frac{m}{M} > 0$, 因此 $0 \leqslant L_\lambda = 1 - \lambda\frac{m}{M} < 1$, 令上式中 $k \to \infty$ 便得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$. 即由式(6)产生

的迭代序列$\{x_k\}$收敛于方程$f(x)=0$在$[a,b]$上的唯一解x^*，且有误差估计式为

$$|x_k-x^*|\leqslant L_\lambda^k|x_0-x^*|\leqslant L_\lambda^k(b-a),\qquad L_\lambda=1-\lambda\frac{m}{M}.$$

2 数值例子

对于函数$f(x)=\frac{9}{25}(x-3)^{5/3}+\frac{1}{3}x^3-3x^2+16x-30,\ x\in[1,4]$，由于$f''(x)=\frac{2}{5\sqrt[3]{x-3}}+2x-6$，因此$f(x)$在$x=3$处的二阶导数不存在. 并且$f''(x)<0,x\in[1,3)$; $f''(x)>0,x\in(3,4]$，可见对此函数来说，文[2]中的 Newton 迭代法收敛性定理不能使用.

现用本文定理来判别. 经计算有(Ⅰ) $f(1)f(4)<0$. 因$f'(x)=\frac{3}{5}(x-3)^{2/3}+x^2-6x+16$，可求得$0<m=7\leqslant f'(x)\leqslant 11+0.6\sqrt[3]{4}<12=M,\ x\in[1,4]$. 即条件(Ⅱ)满足. 由定理 1 知，对任意满足条件(Ⅲ)的初值x_0，由 Newton 迭代式产生的迭代序列$\{x_k\}$收敛于该函数方程$f(x)=0$在$[1,4]$上的唯一解x^*. 事实上，其解$x^*=3$，由前面关于初值条件分析，因为$\frac{b+a}{2}=\frac{4+1}{2}=2.5<3=x^*$. 所以$2=x^*-(b-x^*)\leqslant x_0\leqslant b=4$，即任取$x_0\in[2,4]$便满足初值条件(Ⅲ). 由此可见初值$x_0$的选取范围是很广的.

因为$L=\frac{M}{m}-1=\frac{12}{7}-1=\frac{5}{7}$, $b-a=4-1=3$，所以有$|x_k-x_0|\leqslant(\frac{5}{7})^k|x_0-x^*|\leqslant 3(\frac{5}{7})^k$. 又因为$\frac{m}{M}=\frac{7}{12}$，若取下山因子$\lambda(0<\lambda\leqslant\frac{7}{12})$，则由定理 2 知对任意初值$x_0\in[1,4]$，由 Newton 下山迭代格式$x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}(k=0,1,2,\dots)$产生的迭代序列$\{x_k\}$收敛于该函数方程$f(x)=0$在$[1,4]$上的唯一解$x^*$，且有误差估计式$|x_k-x^*|\leqslant(1-\frac{7}{12}\lambda)^k(b-a)=3(1-\frac{7}{12}\lambda)^k$. 当取$\lambda=\frac{7}{12}$时，便可得到误差估计式$|x_k-x^*|\leqslant 3(\frac{95}{144})^k<3\times 0.66^k$.

参考文献:

[1] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1986: 215-222.
[2] 曹志浩, 张玉德, 李瑞遐. 矩阵计算和方程求根[M]. 北京: 高等教育出版社, 1984: 224-225.
[3] 施妙根, 顾丽珍. 科学和工程计算基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 288-307.
[4] 陈恒新. 关于非负矩阵 Perron 特征值的上、下界[J]. 应用数学与计算数学学报, 2007, 21(1): 1-8.
[5] 陈恒新. MPSD 迭代法的敛散性定理[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2005, 26(2): 121-124.

The Convergence of the Newton Iteration

CHEN Heng-xin

(School of Mathematics Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, some new theorems of convergence of the Newton iteration and Newton descent method in larger convergence domain are introduced, and the expressions of error estimate about these two iterations are presented. It is required that there only exist one order derivate but not two order derivate for the function $f(x)$ to discriminate the convergence of the Newton iteration in the theorem. The ruslts are tested and verified by the numerical examples.

Keywords: Newton iteration; Newton descent method; convergence; criteria theorem

(责任编辑: 钱　筠　　英文审校: 张金顺, 黄心中)