第 29 卷 第 3 期　　华 侨 大 学 学 报 (自 然 科 学 版)　　Vol. 29 No. 3
2008 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 2008

文章编号: 1000-5013(2008) 03-0459-05

C^n 空间中具有非光滑边界强拟凸域上 Koppelman-Leray-Norguet 公式的拓广式

李志伟[1], 陈特清[2]

(1. 泉州师范学院 数学系, 福建 泉州 362000; 2. 厦门大学 数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 利用 Laurent-Thiebaut 等引进的 Γ_K 流形, 构造拓广的 B-M (Bochner-Matinelli) 新核, 探究 C^n 空间中具有非光滑边界强拟凸域上 Koppelman-Leray-Norguet 公式的拓广式和 $\bar{\partial}$ 方程的连续解. 其结果的特点是不含边界积分, 从而避免了边界积分的复杂估计.

关键词: 强拟凸域; 非光滑边界; Koppelman-Leray-Norguet 公式; 拓广式; $\bar{\partial}$-方程

中图分类号: O 174.56　　文献标识码: A

早在 1831 年, Cauchy 发现了以其名字命名的 Cauchy 积分公式, 数学家就认识到积分表示在复分析中的重要性. 自从 20 世纪 70 年代 Henkin[1-2] 和 Grauert 等[3] 分别得到了 C^n 空间中强拟凸域的 $\bar{\partial}$-方程的解的积分公式后, 多复变数的积分表示方法迅速发展起来, 成为多元复分析的主要方法之一, 它的主要优点是如单变数的 Cauchy 积分公式一样便于估计. Koppelman[4] 于 1967 年得到了 C^n 空间中 $(0, q)$ 型微分形式的 Koppelman 公式. 有关 C^n 空间中 $(0, q)$ 型微分形式的积分表示理论取得一些成果[5-8], 姜永[9] 得到 C^n 空间中具有逐块光滑边界有界域上连续有界 $(0, q)$ 型微分形式的一种抽象的积分表示和 $\bar{\partial}$-方程的连续解. 本文在此基础上利用 Laurent-Thiebaut 等[10] 引进的 Γ_K 流形, 构造拓广的 B-M 新核, 研究了 C^n 空间中具有非光滑边界强拟凸域上 Koppelman-Leray-Norguet 公式, 得到其拓广式和 $\bar{\partial}$-方程的连续解. 文中所采用的记号与文[10-12]同.

1 基本知识和引理

设 $D \subset C^n$ 具有非光滑边界强拟凸域, ρ_k 为 S_k 的某一邻域 θ_k 的强多次调和 C^2 函数, 使得

$$D \cap \theta_k = \{z \in \theta_k: \rho_k(z) < 0\}, \qquad k = 1, 2, \cdots, N.$$

$S_1, \cdots, S_N$ 恰构成 D 的边界, 记 $N(\rho_k) = \{z \in \overline{U}_k: \rho_k(z) = 0\}\ (k = 1, \cdots, N)$. 设 $N(\rho_k) \subset\subset U_k\ (k = 1, \cdots, N)$, 因此, 可以用 $\theta_k \subset\subset U_k$ 来记 $N(\rho_k)$ 的邻域. 由文[5]中的定理 4.8.3 和引理 4.8.2, 并假设经过适当放缩 θ_k, 可以找到常数 $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$, 以及定义在 $z \in D \cup \theta_k$, $\zeta \in \theta_k$, C^1 的函数 $\Phi_k(z, \zeta)$ 和 $\Phi_k(z, \zeta)$ 满足下列条件.

(Ⅰ) $\Phi_k(z, \zeta)$, $\Phi_k(z, \zeta)$ 关于 $z \in D \cup \theta_k$ 全纯, 关于 ζ 是 C^1 连续的.

(Ⅱ) 当 $z \in D \cup \theta_k$, $\zeta \in \theta_k$, 且 $|z - \zeta| \geqslant \varepsilon$ 时, 有

$$\Phi_k(z, \zeta) \neq 0, \qquad \Phi_k(z, \zeta) \neq 0; \tag{1}$$

当 $z \in D \cup \theta_k$, $\zeta \in \theta_k$, 且 $|z - \zeta| \leqslant \varepsilon$ 时, 有

$$|\Phi_k(z, \zeta)| \geqslant \alpha(\rho_k(\zeta) - \rho_k(z) + |z - \zeta|^2), \tag{2}$$

收稿日期: 2007-10-03

作者简介: 李志伟(1965-), 男, 副教授, 主要从事多复变函数的研究. E-mail: wei2785801@qztc.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771144)

$$|\tilde{\Phi}_k(z,\zeta)| \geqslant \alpha(-\rho_k(\zeta)-\rho_k(z)+|z-\zeta|^2). \tag{3}$$

对每个 $z\in\theta_k$ 有

$$\Phi_k(z,z)=0. \tag{4}$$

(Ⅲ) 当 $\zeta\in N(\rho_k)$, $z\in D\cup\theta_k$ 时, 有

$$\Phi_k(z,\zeta)=\Phi_k(z,\zeta). \tag{5}$$

由文[5]中推论 4.9.4 并适当放缩 θ_k, 可找到 $T^*(C^n)$ 值 C^1 映射 $s_k^*(z,\zeta)$ 满足下列条件.

(Ⅳ) $s_k^*(z,\zeta)\in T_z^*(C^n)$, $z\in D\cup\theta_k$, $\zeta\in\theta_k$, $k=1,\cdots,N$.

(Ⅴ) $s_k^*(z,\zeta)$ 关于 $z\in D\cup\theta_k$ 全纯, $k=1,\cdots,N$.

(Ⅵ) $\Phi_k(z,\zeta)=\langle s_k^*(z,\zeta),\zeta-z\rangle$, $z\in D\cup\theta_k$, $\zeta\in\theta_k$, $k=1,\cdots,N$.

对在 $D\times S_K\times\Delta_{0,K}$ 的某一邻域 $\subseteq D\times M\times\Delta_{0,K}$ 的所有使得 $\langle s_k^*(z,\zeta),\zeta-z\rangle\neq 0$ 的 (z,ζ), 定义

$$E_\alpha^{(m)}=\lambda_0 g_\alpha^{(m)}+\sum_{k\in K}\lambda_k\frac{P_\alpha^{(k)}(\zeta,z)}{\Phi_k(\zeta,z)},\qquad \alpha=1,2,\cdots,k,n.$$

上式中, $g_\alpha^{(m)}=\dfrac{(\bar\zeta_\alpha-\bar z_\alpha)|\zeta_\alpha-z_\alpha|^{m-2}}{\sum_{j=1}^n|\zeta_j-z_j|^m}$, $m=2,3,\cdots$.

当 ζ 固定时, $P_\alpha^{(k)}$ 关于 $z\in D$ 全纯; 而当 z 固定时, $P_\alpha^{(k)}$ 关于 $\zeta\in\partial D$ 连续, 且满足

$$\Phi_k(z,\zeta)=\sum_{\alpha=1}^n P_\alpha^{(k)}(z,\zeta)(\zeta_\alpha-z_\alpha),\qquad z\in D\cup\theta_k,\quad \zeta\in\theta_k,\quad k=1,\cdots,N. \tag{6}$$

由 s_k^* 的性质可知, 映射 $(z,\zeta,\lambda)\mapsto E_\alpha^{(m)}$ 在 $D\times\partial D\times\Delta$ 的某一邻域 $\subseteq D\times M\times\Delta$ 上, 定义了一个 C^1 函数. 由微分式 $\Omega(E^{(m)})=\dfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\Big(\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}E_k^{(m)}\bar\partial E_1^{(m)}\wedge\cdots\wedge[k]\wedge\cdots\wedge\bar\partial E_n^{(m)}\Big)\wedge d\zeta$ 在 $D\times\partial D\times\Delta$ 的某一邻域 $\subseteq D\times M\times\Delta$ 上是连续的, 其中, $\bar\partial=d_\lambda+\bar\partial_\zeta+\bar\partial_z$, 符号 $[k]$ 表示第 k 项缺失. 对于 C^n 中具有逐块 C^1 边界的强拟凸域, 文[9]证明了下述结论.

引理1[2]　设 f 为一具有逐块 C^1 光滑边界的强拟凸域 $D\subset C^n$ 上的 $(0,q)$ 型微分形式, $f\in C_{(0,q)}(\bar D)$, $\bar\partial f$ 也在 $\bar D$ 连续, $1\leqslant q\leqslant n$, 那么有

$$\begin{aligned}(-1)^q f(z)=\ &\bar\partial_z\Big[\sum_{|K|\leqslant n-q}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0,K}}f(\zeta)\wedge\Omega(E^{(m)})+\int_{D\times\Delta_0}f(\zeta)\wedge\bar\omega^{(m)}(\zeta-z,\bar\zeta-\bar z)-\\&\Big[\sum_{|K|\leqslant n-q}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0,K}}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega(E^{(m)})+\int_{D\times\Delta_0}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\bar\omega^{(m)}(\zeta-z,\bar\zeta-\bar z)\Big].\end{aligned} \tag{7}$$

上式中, $\bar\omega^{(m)}(\zeta-z,\bar\zeta-\bar z)=\dfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left(\dfrac{m}{2}\right)^{n-1}\left[\dfrac{\prod_{j=1}^n|\zeta_j-z_j|^{m-2}\sum_{\alpha=1}^n(-1)^{\alpha-1}(\bar\zeta_\alpha-\bar z_\alpha)d\bar\zeta_{[\alpha]}\wedge d\zeta}{\left[\sum_{j=1}^n|\zeta_j-z_j|^m\right]^n}\right]$, 可称为拓广的 B-M 核, 且 $m=2,3,\cdots,P$, $P<+\infty$; 而当 $m=2$ 时, 则变为通常的 B-M 核.

对 $K=(k_1,\cdots,k_l)\in P(N)$, 定义: 若 $k_1,\cdots,k_l$ 两两不同, $U\dfrac{K}{D}:=\{\zeta\in U_{\bar D}:\rho_{k_1}(\zeta)=\cdots=\rho_{k_l}(\zeta)\}$; 否则, $U\dfrac{K}{D}:=0$.

由局部 q-凸楔形的定义[10]可知, $U\dfrac{K}{D}$ 为一个闭的 C^2 子流形. 记定义在 $U\dfrac{K}{D}$ 上的函数 ρ_K 满足

$$\rho_K(\zeta)=\rho_{k_r}(\zeta),\qquad \zeta\in U\frac{K}{D},\quad r=1,\cdots,l.$$

对于 $K\in P(N)$, 定义

$$\Gamma_K=\{\zeta\in U\frac{K}{D}:\rho_j(\zeta)\leqslant\rho_K(\zeta)\leqslant 0, j=1,\cdots,N\},$$

则不难验证 Γ_K 为 $\bar D$ 的 C^2 子流形, 具有逐块 C^2 边界, 而且有

$$\bar D=\Gamma_1\cup\cdots\cup\Gamma_N,\qquad \partial\Gamma_K=S_K\cup\Gamma_{K_1}\cup\cdots\cup\Gamma_{K_N},\qquad K\in P(N).$$

选择 Γ_K 的方向, 使得定向关于 K 的分量是斜对称的, 且 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_N$ 具有 C^n 的定向. 若 $K\in P(N)$,

$1\leqslant j\leqslant N,\ j\notin K$, 则 Γ_{Kj} 的定向与 $-\partial\Gamma_K$ 的定向是一致.

引理 2[10] $\sum_{K\in P'(N)}(-1)^{|K|}\partial(\Gamma_K\times\Delta_{0,K})=\overline{D}\times\Delta_0+\sum_{K\in P'(N)}(-1)^{|K|}S_K\times\Delta_{0,K}-\sum_{K\in P'(N)}\Gamma_K\times\Delta_K$.

选取 $\chi_k\in C_0^\infty(\theta_k)$, $k=1,\cdots,N$, 使得在 $N(\rho_k)$ 的某邻域上 $\chi_k(\zeta)=1$. 由式(1), (3) 可推出, 对每个 $z\in D$, 存在 $N(\rho_k)$ 的邻域 $V_k\subseteq\theta_k$, 使得对 $\zeta\in(D\cap\theta_k)\cup V_k$ 有 $\Phi_k(z,\zeta)\neq 0$. 因为 $\operatorname{supp}\chi_k\subset\subset\theta_k$, 所以对每一固定的 $z\in D$, 映射 $\chi_k(\zeta)s_k^*(z,\zeta)/\Phi_k(z,\zeta)$ 关于 $\zeta\in D\cup V_k$ 是 C^1 的. 令

$$t_\alpha^{(m)}=\lambda_0 g_\alpha^{(m)}+\sum_{k\in K}\lambda_k\frac{\chi_k(\zeta)s_k^*(z,\zeta)}{\Phi_k(z,\zeta)},\tag{8}$$

则其微分形式 $\Omega(t^{(m)})=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left(\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}t_k^{(m)}\overline{\partial}t_1^{(m)}\wedge\cdots\wedge[k]\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}t_n^{(m)}\right)\wedge d\zeta$ 在 $D\times\partial D\times\Delta$ 的某一邻域 $\subseteq D\times M\times\Delta$ 上是连续的. 记 $Q(t^{(m)}):=\overline{\partial}\Omega(t^{(m)})$, 由此可得

引理 3[12] $d_{\zeta,\lambda}[f(\zeta)\wedge\Omega(t^{(m)})]=\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega(t^{(m)})+(-1)^q f(\zeta)\wedge Q(t^{(m)})-\overline{\partial}_z[f(\zeta)\wedge\Omega(t^{(m)})]$.

引理 4[12] $\Omega(E^{(m)})|_{\Delta_0}=\Omega(t^{(m)})|_{\Delta_0}=\overline{\omega}^{(m)}(\zeta-z,\overline{\zeta}-\overline{z})$.

引理 5　如果 $\zeta\in\partial D$, 则 $\Omega(E^{(m)})=\Omega(t^{(m)})$.

证明　若 $\zeta\in\partial D$, 则 $\chi_k(\zeta)=1$, $\Phi_k(z,\zeta)=\Phi_k(z,\zeta)$, 从而 $\frac{\chi(\zeta)s_k^*(z,\zeta)}{\Phi_k(z,\zeta)}=\frac{s_k^*(z,\zeta)}{\Phi_k(z,\zeta)}$. 故由式(7)可以得到 $E^{(m)}|_{\zeta\in\partial D}=t^{(m)}|_{\zeta\in\partial D}$. 于是, $\Omega(E^{(m)})|_{\zeta\in\partial D}=\Omega(t^{(m)})|_{\zeta\in\partial D}$, 引理 5 成立.

引理 6　当 $z\in D$ 时, 对 $\overline{D}$ 上连续有界 $(0,q)$ 形式 f 有 (1) $\int_{\Gamma_K\times\Delta_K}f(\zeta)\wedge\Omega(t^{(m)})=0,\ q\neq 1$; (2) $\overline{\partial}_z\int_{\Gamma_K\times\Delta_K}f(\zeta)\wedge\Omega(t^{(m)})=0$.

证明　若 $(\zeta,\lambda)\in\Gamma_K\times\Delta_K$, $t^{(m)}=\sum_{k\in K}\lambda_k\chi_k s_k^*(z,\zeta)/\Phi_k(z,\zeta)$, 由于 $s_k^*(z,\zeta)$, $\Phi_k(z,\zeta)$, $(k=1,\cdots,N)$ 关于 z 全纯, $\Omega(t^{(m)})|_{(\zeta,\lambda)\in\Gamma_K\times\Delta_K}$ 中关于 $\overline{\partial}_z$ 是 0 次的, 故 $f(\zeta)\wedge\Omega(t^{(m)})$ 中关于 ζ 与 λ 的次数和是 $2n+1-q$. $\dim_R(\Gamma_K\times\Delta_K)=2n$. 如果 $q\neq 1$, 那么引理 6 的形式(1)中的积分一定为零.

由于 $s_k^*(z,\zeta)$, $\Phi_k(z,\zeta)(k=1,\cdots,N)$ 关于 z 全纯, 引理 6 的形式(2)成立, 则引理 6 成立.

2　定理及证明

定理 1　假设 $D\subset C^n$ 是具有非光滑边界的强拟凸域, 并且 D 具有全纯支撑函数 $\Phi_k(z,\zeta)$, $\Phi_k(z,\zeta)$, $(k=1,\cdots,N)$, 满足式(1)~(5)和条件(Ⅵ), $f\in C_{(0,q)}(\overline{D})$, $\overline{\partial}f$ 也在 $\overline{D}$ 连续, $1\leqslant q\leqslant n$, 那么

$$\begin{aligned}f(z)=&\sum_{|K|\leqslant n-q}(-1)^{|K|}\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}}\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge Q_{0,q}(t^{(m)})+\\&\sum_{|K|\leqslant n-q+1}(-1)^{|K|}\overline{\partial}_z\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}}f(\zeta)\wedge Q_{0,q-1}(t^{(m)}),\qquad z\in D.\end{aligned}\tag{9}$$

证明　不妨先证明特殊情况. 设当 $\zeta\in\partial D$, $d\rho_k(\zeta)\neq 0$, $(k=1,\cdots,N)$, 而且 f, $\overline{\partial}f$ 在 $\overline{D}$ 上连续. 在 $\sum_{K\in P'(N)}(-1)^{|K|}\Gamma_K\times\Delta_{0,K}$ 上对微分形式 $f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)})$ 运用 Stokes 公式得

$$\sum_{K\in P'(N)}(-1)^{|K|}\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}}d_{\zeta,\lambda}[f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)})]=\sum_{K\in P'(N)}(-1)^{|K|}\int_{\partial(\Gamma_K\times\Delta_{0,K})}f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)}).$$

由引理 2, 3 有

$$\begin{aligned}&\sum_{K\in P'(N)}(-1)^{|K|}\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}}\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)})+(-1)^q\sum_{K\in P'(N)}(-1)^{|K|}\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}}f(\zeta)\wedge Q_{0,q-1}(t^{(m)})+\\&\sum_{K\in P'(N)}(-1)^{|K|}\overline{\partial}_z\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}}f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-2}(t^{(m)})=\int_{\overline{D}\times\Delta_0}f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)})+\\&\sum_{K\in P'(N)}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0,K}}f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)})-\sum_{K\in P'(N)}\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}}f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)}).\end{aligned}$$

于是有

$$\sum_{K\in P'(N)}(-1)^{|K|}\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}}f(\zeta)\wedge Q_{0,q-1}(t^{(m)})=(-1)^q\left[\int_{\overline{D}\times\Delta_0}f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)})+\right.$$

$$\sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0,K}} f(\zeta)\wedge\Omega_{p,q-1}(t^{(m)})]+$$
$$(-1)^{q+1}[\sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\bar\partial_z\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}} f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-2}(t^{(m)})+$$
$$\sum_{K\in P(N)}\int_{\Gamma_K\times\Delta_K} f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)})+\sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)})]. \tag{10}$$

用$\bar\partial_z$ 作用式(10)两边, 可得到

$$\sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\bar\partial_z\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}} f(\zeta)\wedge Q_{0,q-1}(t^{(m)})=(-1)^q\bar\partial_z[\int_{\bar D\times\Delta_0} f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)})+$$
$$\sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0,K}} f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)})]+(-1)^{q+1}\bar\partial_z[\sum_{K\in P(N)}\int_{\Gamma_K\times\Delta_K} f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)})+$$
$$\sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)})]. \tag{11}$$

在式(10)中用$\bar\partial_\zeta f(\zeta)$代换$f(\zeta)$, 可得到

$$\sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge Q_{0,q}(t^{(m)})=(-1)^{q+1}[\int_{\bar D\times\Delta_0}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q}(t^{(m)})+$$
$$\sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0,K}}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q}(t^{(m)})]+$$
$$(-1)^q[\sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\bar\partial_z\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)})+\sum_{K\in P(N)}\int_{\Gamma_K\times\Delta_K}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q}(t^{(m)})]. \tag{12}$$

由 $q\geqslant1$ 及引理6可知

$$\int_{\Gamma_K\times\Delta_K}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega(t^{(m)})=0,$$
$$\bar\partial_z\int_{\Gamma_K\times\Delta_K} f(\zeta)\wedge\Omega(t^{(m)})=0.$$

把式(11), (12)相加可以得到

$$\sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge Q_{0,q}(t^{(m)})+\sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\bar\partial_z\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}} f(\zeta)\wedge Q_{0,q-1}(t^{(m)})=$$
$$(-1)^q\bar\partial_z[\int_{\bar D\times\Delta_0} f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)})+\sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0,K}} f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}(t^{(m)})]+$$
$$(-1)^{q+1}[\int_{\bar D\times\Delta_0}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q}(t^{(m)})+\sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0,K}}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q}(t^{(m)})]. \tag{13}$$

另外, 由引理4, 5可知

$$\Omega(E^{(m)})|_{\Delta_0}=\Omega(t^{(m)})|_{\Delta_0}=\bar\omega^{(m)}(\zeta-z,\bar\zeta-\bar z),$$
$$\Omega(E^{(m)})|_{\zeta\in\partial D}=\Omega(t^{(m)})|_{\zeta\in\partial D}.$$

当$|K|>n-q$时, $\dim_R S_K=2n-|K|<n+q$, 而$f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}$关于$\zeta$的次数$\geqslant n+q$, 故有

$$\int_{S_K\times\Delta_{0,K}} f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q-1}=0,\qquad |K|>n-q. \tag{14}$$

同理可得

$$\int_{S_K\times\Delta_{0,K}}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_{0,q}=0,\qquad |K|>n-q-1, \tag{15}$$
$$\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge Q_{0,q-1}=0,\qquad |K|>n-q+1, \tag{16}$$
$$\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0,K}}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge Q_{0,q}=0,\qquad |K|>n-q. \tag{17}$$

由式(13)~(17)及Koppelman-Leray-Norguet公式的拓广式(引理1)可知, 式(9)在$d\rho_k(\zeta)\neq0$, $\zeta\in\partial D$时成立. 其次, 考虑一般情况, 即不假设当$\zeta\in\partial D$时, 有$d\rho(k)\neq0$, $k=1,\cdots,N$. 在这种情况下, 可以通过考虑一列无限逼近D的强拟凸域D_v来证明定理, 而本节所有的构造关于v都是一致收敛的. 由此, 定理1的可证.

由定理1, 只要做适当假设即可得

推论 1　在定理 1 条件下, 若 $f \in C_{(0,q)}(\overline{D})$, $\bar{\partial} f = 0$, $1 \leqslant q \leqslant n$, 则有

$$g(z) = \sum_{|K| \leqslant n-q+1} (-1)^{|K|} \int_{\Gamma_K \times \Delta_{0,K}} f(\zeta) \wedge Q_{0,q-1}(t^{(m)}),$$

是 D 上 $\bar{\partial} g = f$ 的连续解.

参考文献:

[1] HENKIN G M. Integral representations of holomorphic functions in strictly pseudoconvex domains and applications [J]. Mat Sb, 1969, 78: 611-632.

[2] HENKIN G M. Integral representations of functions in strictly pseudoconvex domains and applications to the $\bar{\partial}$-problem[J]. Mat Sb, 1970, 82: 300-308.

[3] GRAUERT H, LIEB L. Das Ramirezsche integral und die Lösung der gleichung $\partial f = \alpha$ im bereich der beschränkten formen[J]. Proc Conf Complex Analysis, 1970, 56: 29-50.

[4] KOPPELMAN W. The Cauchy integral for differential forms[J]. Bull Amer Soc, 1967, 73: 554-556.

[5] HENKIN G M, LEITERER J. Theory of function on complex manifolds[M]. Berlin: Birkhäuser Verlag, 1984.

[6] RANGE R M. Holomorphic functions and integral representations in several complex variables[M]. New York: Springer-Verlag, 1986.

[7] 钟同德, 黄　沙. 多元复分析[M]. 石家庄: 河北教育出版社, 1990.

[8] RANGE R M, SIU Y T. Uniform Estimates for the $\bar{\partial}$-equation on domains with piecewise smooth strictly pseudoconvex boundaries[J]. Math Ann, 1973(206): 325-354.

[9] 姜　永. C^n 空间中具有逐块光滑边界的有界域上 K-L-N 公式的拓广式[J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 2007, 45(6): 746-749.

[10] LAURENT-THIEBAUT C, LEITERER J. Uniform estimates for the Cauchy-Riemann equation on q-convex wedges[J]. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1993, 43(2): 383-436.

[11] 陈吕萍. C^n 中具有逐块光滑边界的有界域上带权因子积分表示的拓广式[J]. 数学学报, 2006, 5: 1113-1120.

[12] 邱春晖, 林良裕. Stein 流形上具有非光滑边界的带权因子的 Koppelman-Leray 公式[J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 1999, 37(1): 11-16.

Extension Formula of Koppelman-Leray-Norguet Formula on a Strictly Pseudoconvex Domain with Non-Smooth Boundary in C^n Space

LI Zhi-wei[1], CHEN Te-qing[2]

(1. Department of Mathematics, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362000, China;
2. School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract:　By meams of Γ_K manifolds introduced by Laurent-Thiebaut, et al, we constructed extend B-M (Bochner-Martinelli) kernel to study extension formula of Koppelman-Leray-Norguet formula and obtained a continuous solutions of $\bar{\partial}$-equation on a strictly pseudoconvex domain with non-smooth boundary in C^n space. Our method does not involve integral on boundary that can avoid the complexity estimations of the boundary integrals.

Keywords:　strictly pseudoconvex domain; non-smooth boundary; Koppelman-Leray-Norguet formula; extension formula; $\bar{\partial}$-equation

(责任编辑: 陈志贤　　英文审校: 张金顺　黄心中)