第 29 卷 第 3 期
2008 年 7 月

华侨大学学报(自然科学版)
Journal of Huaqiao University (Natural Science)

Vol. 29 No. 3
Jul. 2008

文章编号: 1000-5013(2008)03-0455-04

半群分次范畴的 Smash 积

林妹珠[1], 蔡菊香[2], 陈清华[2]

(1. 福建农林大学 计算机与信息学院, 福建 福州 350002; 2. 福建师范大学 数学与计算机科学学院, 福建 福州 350007)

摘要: 设 S 为有单位元 1 的可消半群, 引入半群 S-分次范畴的 Smash 积的概念, 分别证明半群 S-分次范畴 C 的 Smash 积 $C\#S$ 的商范畴 $(C\#S)/S$ 与范畴 C 同构, 以及自由半群 S-范畴 B 的商范畴 B/S 的 Smash 积范畴 $(B/S)\#S$ 与范畴 B 同构. 从而说明半群分次范畴的 Smash 积与自由半群作用范畴的商在半群分次范畴和自由半群作用范畴之间是互逆的结构.

关键词: 自由半群作用范畴; 商范畴; 半群分次范畴; Smash 积

中图分类号: O 154.1 文献标识码: A

代数的分次理论中有关 Smash 积的概念及相关性质在环、模范围中作了许多探讨与推广. 近十几年来, 范畴方法的应用给研究提供了一些新的思路. 1984 年, Cohen 等[1] 首先引入了群 G-分次代数 A 的 Smash 积 $A\#G$ 的概念, 证明了模范畴之间的自然同构: $A\#G\text{-Mod}\simeq A\text{-gr}$. 随后, 文[2-3]讨论了 G-分次环 R 与群 G 的 Smash 积的一些性质, 说明了范畴 $R\#G\text{-Mod}$ 与范畴 $R\text{-gr}$ 同构. Năstăasescu 等[4] 主要探讨 G-分次环与有限可迁 G-集的 Smash 积. 刘绍学[5] 将其推广到 G-分次环 R 与任意可迁 G-集 G/H 的 Smash 积 $R\#G/H$, 证明了相应的对偶定理: $R\#G/H\text{-Mod}\simeq(G/H,R)\text{-gr}$. 文[6]给出分次模 R 与群 G 的 Smash 积的概念和性质, 刻划了 Smash 积与分次迹和分次余迹的关系. 文[7]引入群分次范畴 C 与群 G 的 Smash 积 $C\#G$ 的概念, 探讨范畴的 Smash 积与范畴的商在分次和自由作用之间的结构. 本文对有单位元的可消半群 S, 引入半群分次范畴的 Smash 积范畴的概念, 推广了文[1, 7]的相应结果.

1 预备知识[7]

定义 1 称范畴 C 为小范畴, 若 C 的对象和态射都构成集.

定义 2 称范畴 C 为交换环 k 上的范畴. 若 C 的所有对象构成集 C_0; $\forall x, y\in C_0$, 态射集 ${}_yC_x$ 是 k-模, 且态射的合成是 k-双线性的.

引入有关半群作用范畴的几个概念.

定义 3 设 S 是一个半群, C 为交换环 k 上的范畴, 称范畴 C 为 k 上的 S-范畴. 若它满足: 首先, S 对 C_0 有一个作用 $o: S\times C_0\to C_0, (s,x)\mapsto sx$ 满足: (1) $(st)x=s(tx)$, $\forall s,t\in S$; (2) $\forall x\in C_0$, $1x=x$. 其次, 对 $\forall s\in S$, k-模映射 $s: {}_yC_x\to{}_{sy}C_{sx}$, 满足 $s(gf)=(sg)(sf)$. 这里 f, g 为 C 中态射且能合成, 且对于 $\forall t,s\in S$, 有 $(ts)f=t(sf)$, $1f=f$.

假设 S 是半群, C 是 k 上的 S-范畴, C_0 是其对象集. 在 C_0 中, 定义一个二元关系"~": $\forall x,y\in C_0$, $x\sim y\Leftrightarrow$存在 $s\in S$, 使得 $y=sx$. 一般来说, 这个二元关系不会满足对称性, 从而不是一个等价关系.

定义 4 当如上定义的二元关系为一个等价关系时, 称由此等价关系所确定的等价类为 C_0 的 S-作用的轨道.

收稿日期: 2007-10-29
作者简介: 林妹珠(1972-), 女, 讲师, 主要从事代数范畴论的研究. E-mail: meizhulin@sohu.com.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371101); 福建省自然科学基金资助项目(Z0511022); 福建省教育厅科研基金资助项目(JA05206, JB04251); 福建农林大学青年教师科研基金资助项目(021747)

定义 5 设 C 是 k 上的 S-范畴, 如果对 $\forall x\in C_0$, $s, s'\in S$, 由 $sx=s'x$ 推得 $s=s'$, 则称 C 为自由半群 S-范畴.

定义 6 对于 k 上的自由半群 S-范畴 C, 称以下定义的范畴为商范畴, 记为 C/S. (1) 对象. C_0 的 S-作用的轨道, 即 $\alpha_x=\{gx\mid g\in S\}$, $x\in C_0$. (2) 态射. 对任意两个轨道 α, β, 态射 ${}_\beta(C/S)_\alpha=(\bigoplus_{x\in\alpha, y\in\beta} {}_yC_x)/S$. $\bigoplus_{x\in\alpha, y\in\beta} {}_yC_x$ 是一个 kS-模, 且 $(\bigoplus_{x\in\alpha, y\in\beta} {}_yC_x)/S$ 有如下特定意义: 若 X 是一个 kS-模, $X/S=X/(\mathrm{Ker}\varepsilon)X$. 这里 $\varepsilon: kS\to k$ 是扩张映射, 即 ε 满足: (i) ε 是 k-线性的; (ii) $\forall s\in S$, $\varepsilon(s)=1$. (3) 态射的合成. 设 ${}_\beta\overline{f}_\alpha\in(\bigoplus_{x\in\alpha, y\in\beta} {}_yC_x)/S$, ${}_\gamma\overline{g}_\beta\in(\bigoplus_{y\in\beta, z\in\gamma} {}_zC_y)/S$. 其中, ${}_\beta f_\alpha\in\bigoplus_{x\in\alpha, y\in\beta} {}_yC_x$, ${}_\gamma g_\beta\in\bigoplus_{x\in\beta, z\in\gamma} {}_zC_y$, 定义 ${}_\gamma\overline{g}_\beta\cdot{}_\beta\overline{f}_\alpha=\overline{{}_\gamma g_\beta\cdot{}_\beta f_\alpha}\in(\bigoplus_{x\in\alpha, z\in\gamma} {}_zC_x)/S$.

注: 以上合成的定义与代表元的选取无关. 即若 $\overline{g'}=\overline{g}, \overline{f'}=\overline{f}$, 有 $\overline{g'}\cdot\overline{f'}=\overline{g}\cdot\overline{f}$.

定义 7 自由半群 S-范畴 C 到它的商范畴 C/S 的典范投影函子 $F: C\to C/S$ 称为一个 Galois 盖, 或称自由半群 S-范畴 C 为商范畴 C/S 的 Galois 盖.

定义 8 假设 C 是 k 上的 S-范畴, 称以下定义的范畴为斜半群作用范畴, 记为 $C[S]$. (1) 对象集. $(C[S])_0=C_0$. (2) 态射集. ${}_y(C[S])_x=\bigoplus_{s\in S} {}_yC_{sx}$, 这里 $x\in\alpha$, $y\in\beta$. (3) 态射合成. $f\in{}_yC[S]_x=\bigoplus_{s\in S} {}_yC_{sx}$, $g\in{}_zC[S])_y=\bigoplus_{t\in S} {}_zC_{ty}$, 则 $gf=g_0(tf)\in{}_zC[S])_x=\bigoplus_{t, s\in S} {}_zC_{tsx}$.

注: 以上合成的定义与代表元的选取无关.

定义 9 设 S 是半群, C 是 k 上的 S-范畴, 令 $a(C)=\bigoplus_{x, y\in C_0}({}_yC_x)=\{({}_yf_x)_{c_0\times c_0}\mid {}_yf_x\in{}_yC_x\}$. 利用态射的合成, $a(C)$ 关于矩阵的加法和乘法构成一个 k-代数, 称之为与范畴 C 相应的 k-代数.

定义 10 设 S 是一个半群, 一个 k 上的 S-范畴 C 称为 S-分次范畴. 如果态射 ${}_yC_x=\bigoplus_{s\in S} {}_yC_x^s$ 且满足 ${}_zC_y^t\ {}_yC_x^s\subseteq{}_zC_x^{ts}$. 特别地, $\forall x\in C_0$, ${}_xB_x$ 是一个 S-分次代数.

类似于文[8](也可见文[9]), 给出一些记号. 设 S 为一个半群, 非空集合 A 是一个 S-集(即存在 S 在 A 上的一个作用 $S\times A\to A$, $(s, a)\mapsto sa$ 满足 $\forall s, t\in S$, $(st)a=s(ta)$ 且 $1a=a$, 这里 1 为 S 中单位元). 对每个 $(x, y)\in A\times A$, 定义 $[xy^{-1}]=\{s\in S\mid sy=x\}$. 对每个 $t\in S$, $y\in A$, $t\in[(ty)y^{-1}]$. 因此固定 $y\in A$, 集合 $\{[xy^{-1}]\mid x\in A, [xy^{-1}]\neq\varnothing\}$ 是 S 的一个分拆. 同样可类似定义 $[x^{-1}y]=\{s\in S\mid xs=y\}$.

本文总假设 S 是有单位元 1 的可消半群, k 是交换环(结合且有单位元 1).

2 半群分次范畴的 Smash 积

定义 11 假设 S 是一个可消半群, C 是 k 上的 S-分次范畴, 则称以下定义的范畴为 Smash 积范畴, 记为 $C\# S$. (1) 对象集. $C_0\times S=\{(x, s)\mid x\in C_0, s\in S\}$. (2) 态射. 对于任意的两个对象 (x, s) 及 (y, t), k-模态射集 ${}_{(y, t)}(C\# S)_{(x, s)}={}_yC_x^{[t^{-1}s]}$. (3) 态射的合成. ${}_{(z, u)}(C\# S)_{(y, t)}\cdot{}_{(y, t)}(C\# S)_{(x, s)}\to{}_{(z, u)}(C\# S)_{(x, s)}$, ${}_{(z, u)}f_{(y, t)}\cdot{}_{(y, t)}g_{(x, s)}\mapsto{}_{(z, u)}fg_{(x, s)}$.

注 1: 范畴的分次合成可保证上述 Smash 积范畴中态射的合成关系. 事实上, ${}_zC_y^{[u^{-1}t]}\cdot{}_yC_x^{[t^{-1}s]}\subseteq{}_zC_x^{[u^{-1}t][t^{-1}s]}$, 而 $[u^{-1}t][t^{-1}s]\subseteq[u^{-1}s]$.

注 2: ${}_{(y, t)}(C\# S)_{(x, s)}$ 与 ${}_{(y, ut)}(C\# S)_{(x, us)}$ 均为 k-模同态. 作为 k-模, 它们可看作相等. 这是因为, 由定义 ${}_{(y, ut)}(C\# S)_{(x, us)}={}_yC_x^{[(ut)^{-1}us]}$. 由半群 S 的可消性可得 $[(ut)^{-1}us]=[t^{-1}s]$, 即 ${}_{(y, ut)}(C\# S)_{(x, us)}={}_yC_x^{[t^{-1}s]}={}_{(y, t)}(C\# S)_{(x, s)}$.

定理 1 设 S 是一个可消半群, C 是 k 上的 S-分次范畴, 则 Smash 积范畴 $C\# S$ 是一个自由 S-范畴且 $(C\# S)/S\simeq C$

证明 定义 $S\times(C\# S)_0\to(C\# S)_0$, $(u, (x, s))\to u(x, s)=(x, us)$. 任给范畴 $C\# S$ 中的对象 (x, s), $t, u\in S$, 由 $u(x, s)=t(x, s)$ 知 $(x, us)=(x, ts)$, 得 $us=ts$, 从而 $u=t$, 故范畴 $C\# S$ 是一个自由 S-范畴. 商范畴 $(C\# S)/S$ 中对象是 $(C\# S)_0$ 的 S-作用的轨道. 即 $\alpha_{(x, s)}=\{u(x, s)\mid u\in S\}$, $(x, s)\in(C\# S)_0$. 由定义可知, 它与范畴 C 中的对象一一对应.

态射: ${}_\beta[(C\# S)/S]_\alpha=[\bigoplus_{s\in S, t\in S} {}_{(y, t)}(C\# S)_{(x, s)}]/S=(\bigoplus_{s\in S, t\in S} {}_yC_x^{[t^{-1}s]})/S$. 设 $f\in{}_{(y, t)}(C\# S)_{(x, s)}=$

${}_yC_x^{[t^{-1}s]}$, 可定义 $f = uf \in_{(y,ut)}(C\# S)_{(x,us)}$, $u \in S$. 则

$$_\beta[(C\# S)/S]_\alpha = \Big(\bigoplus_{s\in S, t\in S} {}_yC_x^{[t^{-1}s]}\Big)/S = \bigoplus_{s\in S} {}_{(y,1)}(C\# S)_{(x,s)} = \bigoplus_{s\in S} {}_yC_x^s = {}_yC_x.$$

所以 $(C\# S)/S \simeq C$. 至此, 可知 $C\# S$ 是 C 的一个 Galois 盖.

推论 1　设 S 是一个可消半群, C 是 k 上的 S-分次范畴, 则 $(C\# S)[S] \approx C$

证明　由定理 1 知, $C\# S$ 是一个自由 S-范畴, 且 $(C\# S)/S \simeq C$. 又可证得 $C/S \approx C[S]$, 其中范畴 C 是自由 S-范畴. 因此, $(C\# S)[S] \approx (C\# S)/S$. 故 $(C\# S)[S] \approx C$.

下面证明自由半群 S-范畴 B 的商范畴 B/S 与 S 的 Smash 积 $(B/S)\# S$ 与范畴 B 同构, 从而引出结论: 半群分次范畴的 Smash 积和自由半群作用范畴的商在半群分次范畴与自由半群作用范畴之间是互逆的结构.

定理 2　设 S 是可消半群, B 是 k 上的自由 S-范畴, 则商范畴 B/S 是 S-分次范畴且 $(B/S)\# S \simeq B$.

证明　因为 ${}_\beta(B/S)_\alpha = \Big(\bigoplus_{x\in\alpha, y\in\beta} {}_yB_x\Big)/S$. 设 ${}_yf_x \in {}_yB_x$, 对每一类 ${}_y\overline{f}_x$, 定义 $\deg {}_y\overline{f}_x$: 设 $\{x_\alpha, x_\beta, \cdots\}$ 为 B_0 的 S-作用轨道的代表元集, 对 $x, x_\alpha \in \alpha$; $y, x_\beta \in \beta$, 则存在 $s \in S$, 使得 $sx = x_\alpha$, 从而在 sy 与 x_β 之间存在一个 S 中的元素 t, 使得 $tx_\beta = sy$. 记 t 为 $\deg {}_y\overline{f}_x$, 即 $\deg {}_y\overline{f}_x x_\beta = sy$. 对每一类 ${}_y\overline{f}_x$, 如上定义的 $\deg {}_y\overline{f}_x$ 具有唯一性.

首先, $\deg {}_y\overline{f}_x$ 的定义与代表元的选取无关. 事实上, 设 $u \in S$, $uf \in {}_{uy}B_{ux}$, uf 与 f 在同一类中. 由 $[su^{-1}] \subset [x_\alpha(ux)^{-1}]$ 可知, 对 $\forall h \in [su^{-1}]$ 有 $hux = x_\alpha$ 且 $(\deg \overline{uf})x_\beta = huy = sy$, 则 $\deg \overline{uf} = \deg \overline{f}$. 其次, 定义 ${}_\beta(B/S)_\alpha^s = \{\Sigma\overline{f} \mid f \in {}_yB_x, x \in \alpha, y \in \beta, \deg \overline{f} = s', 且 ss' = 1\}$, 则 ${}_\beta(B/S)_\alpha = \bigoplus_{s\in S} {}_\beta(B/S)_\alpha^s$. 因此, 要验证 $({}_\gamma(B/S)_\beta^t)({}_\beta(B/S)_\alpha^s) \subseteq {}_\gamma(B/S)_\alpha^{ts}$, 只须证 $\deg \overline{gf} = (\deg \overline{g})(\deg \overline{f})$. 事实上, 考察 ${}_{(\deg \overline{f})x_\beta}f_{x_\alpha}$ 与 ${}_{(\deg \overline{g})x_\gamma}g_{x_\beta}$, $\overline{gf} = {}_{(\deg \overline{f}\deg \overline{g})x_\gamma}\overline{((\deg\overline{f})gf)x_\alpha}$, 则 $\deg \overline{gf} = (\deg \overline{g})(\deg \overline{f})$. 因此, B/S 是 S-分次范畴.

最后, 定义函子 $F: (B/S)\# S \to B$, $(\alpha, s) \to sx_\alpha$, ${}_{[s^{-1}t]x_\beta}\overline{f}_{x_\alpha} \in_{(\beta,t)}((B/S)\# S)_{(\alpha,s)} \to sf \in {}_{tx_\beta}B_{sx_\alpha}$. 对对象, $F: (\alpha, s) \to sx_\alpha$ 显然是一个双射. 对态射, F 是一个 k-模同构.

(1) F 保持运算. 令 ${}_{[s^{-1}t]x_\beta}\overline{f}_{x_\alpha} \in_{(\beta,t)}((B/S)\# S)_{(\alpha,s)}$, ${}_{[t^{-1}u]x_\gamma}\overline{g}_{x_\beta} \in_{(\gamma,u)}((B/S)\# S)_{(\beta,t)}$, 则 $\overline{gf} = \overline{([s^{-1}t]g)(f)}$, $F(\overline{gf}) = F(\overline{([s^{-1}t]g)(f)}) = s(([s^{-1}t]g)(f)) = \underline{(s[s^{-1}t]g)}(sf) = (tg)(sf) = F(\overline{g}) \times F(\overline{f})$. (2) 定义态射. $F^*: B \to (B/S)\# S$, ${}_{tx_\beta}f_{sx_\alpha} \to {}_{[s^{-1}t]x_\beta}\overline{([1s^{-1}]f)}_{x_\alpha}$. $FF^*({}_{tx_\beta}f_{sx_\alpha}) = F({}_{[s^{-1}t]x_\beta}\overline{([1s^{-1}]f)}_{x_\alpha}) = {}_{tx_\beta}f_{sx_\alpha}$. $F^*F({}_{[s^{-1}t]x_\beta}\overline{f}_{x_\alpha}) = F^*({}_{tx_\beta}(sf)_{sx_\alpha}) = {}_{[s^{-1}t]x_\beta}\overline{f}_{x_\alpha}$. 即 $FF^* = 1_B$, $F^*F = 1_{(B/S)\# S}$. 因此, $(B/S)\# S \simeq B$

定义 12　设 A 是一个半群 S-分次 k-代数. 定义 Smash 积 $A\# k^S$ 为挠张量积 $A \otimes k^S$, 其挠映射为 $\tau: k^S \otimes A \to A \otimes k^S$, $\delta_t \otimes f_s \mapsto f_s \otimes \delta_{[s^{-1}t]}$. 其中 $t, u, s \in S$, $\delta_t(u) = \begin{cases} 1, & u = t, \\ 0, & u \neq t, \end{cases}$ f_s 是 A 中位于分量 s 的元素.

通过验证映射 τ 满足结合性可知 τ 是一个挠映射, $A \otimes k^S$ 为挠张量积. 为方便, 省略符号 τ 与 $\otimes$, 即上述映射写为 $\delta_t f_s = f_s \delta_{[s^{-1}t]}$. (1) 若 $u \neq t$, $(\delta_u\delta_t)f_s = 0$; 若 $u = t$, $(\delta_u\delta_t)f_s = f_s\delta_{[s^{-1}t]}$; 若 $u \neq t$, $\delta_u(\delta_t f_s) = \delta_u f_s \delta_{[s^{-1}t]} = f_s\delta_{[s^{-1}u][s^{-1}t]} = 0$; 若 $u = t$, $\delta_u(\delta_t f_s) = f_s\delta_{[s^{-1}t]}$, 故 $\delta_u(\delta_t f_s) = (\delta_u\delta_t)f_s$. (2) $\delta_u(g_t f_s) = g_t f_s \delta_{[(ts)^{-1}u]}$, 因为 $g_t f_s \in A_{ts}$, $(\delta_u g_t)f_s = g_t\delta_{[t^{-1}u]}f_s = g_t f_s \delta_{\substack{[s^{-1}h] \\ h\in[t^{-1}u]}} = g_t f_s \delta_{[(ts)^{-1}u]}$. 所以 $\delta_u(g_t f_s) = (\delta_u g_t) f_s$. 由挠映射可定义 $A \otimes k^S$ 中乘法为 $(f_s\delta_t)(f_u\delta_v) = f_s f_u \delta_{[u^{-1}t]}\delta_v$. 易证乘法满足结合性, 从而 Smash 积 $A\# k^S$ 是 k 上的结合代数, 有局部单位元. 事实上, $\forall s, t, u, v, w, h \in S$ 有 $[(f_s\delta_t)(f_u\delta_v)](f_w\delta_h) = \begin{cases} f_s f_u f_w \delta_h, & 若\ uv = t, 且\ wh = v \\ 0, & 其他 \end{cases} = (f_s\delta_t)[(f_u\delta_v)(f_w\delta_h)]$.

有了上述准备, 即可得到一个凝聚结果.

命题 1　设 S 是可消半群, A 是 S-分次 k-代数, C_A 是 k 上的由自同态代数 A 所确定的单对象范畴, 则 C_A 为 S-分次范畴且 $a(C_A\# S) \simeq A\# S$.

证明　因为 A 是 S-分次 k-代数, 而 C_A 是由自同态代数 A 所确定的单对象范畴, 所以有 ${}_{x_0}(C_A)_{x_0} = \bigoplus_{s\in S} {}_{x_0}(C_A)_{x_0}^s$, 且 ${}_{x_0}(C_A)_{x_0}^t\,{}_{x_0}(C_A)_{x_0}^s \subseteq {}_{x_0}(C_A)_{x_0}^{ts}$. 即 C_A 为 S-分次范畴. 又因为 $a(C_A\# S) = \bigoplus_{s,t\in S} {}_{(x_0,t)}(C_A\# S)_{(x_0,s)} = \bigoplus_{s,t\in S} {}_{x_0}(C_A)_{x_0}^{[t^{-1}s]} = \bigoplus_{s,t\in S} A_{[t^{-1}s]}$. 定义 $\varphi: a(C_A\# S) \to A\# S$, ${}_tF_s \to f_{[t^{-1}s]}\delta_{[1s^{-1}]}$. 这里, ${}_tF_s$ 为 $a(C_A\#$

$S)$ 中的初等矩阵, 它在位置 $(x_0, t)-(x_0, s)$ 处值为 $f_{[t^{-1}s]}\in{}_{(x_0,t)}(C_A\# S)_{(x_0,s)}={}_{x_0}(C_A)_{x_0}^{[t^{-1}s]}=A_{[t^{-1}s]}$, 其余位置为 0. 则 φ 是一个代数同构.

首先, 映射 φ 显然有意义. 其次, φ 保持运算: 设 ${}_vG_u$ 与 ${}_tF_s$ 均为 $a(C_A\# S)$ 中的初等矩阵, 若 $u\neq t$, 则 ${}_vG_u\,{}_tF_s=0$; 若 $u=t$, 则 ${}_vG_u\,{}_tF_s={}_v(GF)_s$. 它在位置 $(x_0, v)-(x_0, s)$ 处的值为 $g_{[v^{-1}u]}f_{[u^{-1}s]}$, 而在其余位置的值为 0.

$$\varphi({}_vG_u)\varphi({}_tF_s)=g_{[v^{-1}u]}\delta_{[1u^{-1}]}f_{[t^{-1}s]}\delta_{[1s^{-1}]}=g_{[v^{-1}u]}f_{[t^{-1}s]}\underset{th_1=s,\,h_2u=1}{\delta_{[h_1^{-1}h_2]}}\delta_{[1s^{-1}]}.$$

当 $u\neq t$ 时, $\varphi({}_vG_u)\varphi({}_tF_s)=0$; 当 $u=t$ 时, $\varphi({}_vG_u)\varphi({}_tF_s)=g_{[v^{-1}u]}f_{[t^{-1}s]}\delta_{[1s^{-1}]}$, 而 $\varphi({}_vG_u\,{}_tF_s)=g_{[v^{-1}u]}f_{[t^{-1}s]}\delta_{[1s^{-1}]}$. 故 $\varphi({}_vG_u{}_tF_s)=\varphi({}_vG_u)\varphi({}_tF_s)$. 最后, φ 显然是一个单射, 满射. 所以 $a(C_A\# S)\simeq A\# S$.

参考文献:

[1] COHEN M, MONTGOMERY S. Group-graded rings, Smash products, and group actions[J]. Trans Amer Math Soc, 1984, 282: 237-258.

[2] BEATTIE M. A generalization of the Smash product of a graded ring[J]. J Pure Appl Algebra, 1988, 52(3): 219-229.

[3] LIU Shao-xue, VAN OYSTAEYEN F. Group graded rings, Smash product and additive categories, in perspective in ring theory[M]. [s.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1998: 299-310.

[4] NĂSTĂSESCU C, RAIANU S, VAN OYSTAEYEN F. Modules graded by G-sets[J]. Math, 1990, 203(4): 605-627.

[5] 刘绍学. G-分次环与G-集的冲积(Smash Product)[J]. 数学学报, 1993, 36(2): 199-206.

[6] 易 忠. 模的Smash Product 及分次迹和分次余迹[J]. 广西师范大学学报: 自然科学版, 1998, 16(1): 1-7.

[7] CIBILS C, EDUARDO N M. Skew category, Galois covering and Smash product of a k-category[J]. Proc Amer Math Soc, 2006, 134(1): 39-50.

[8] ABRAMS G, MENINI C, DELRIO A. Realization theorems for catgories of graded modules over semigroup-graded rings[J]. Comm Algebra, 1994, 22(13): 5343-5388.

[9] 张子龙, 蔡炳苓, 刘淑霞. 半群S-分次环与冲积 $R\# S$[J]. 数学学报, 2004, 47(5): 985-992.

Smash Product of Semigroup-Graded Category

LIN Mei-zhu[1], CAI Ju-xiang[2], CHEN Qing-hua[2]

(1. College of Computer and Information, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350002, China;
2. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China)

Abstract: For Smash product of semigroup-graded category, we prove that the quotient category $(C\# S)/S$ of Smash product $C\# S$ of semigroup S graded category C is isomorphic to category C, and the Smash product category $(B/S)\# S$ of the quotient category B/S of free semigroup S category B is isomorphic to category B when S is a cancellative semigroup with identity 1. It is shown that the semigroup-graded categorical Smash product and the semigroup categorical quotient are inverse structions between semigroup-graded categories and free semigroup action categories.

Keywords: free semigroup action category; quotient category; semigroup-graded category; Smash product

(责任编辑: 黄仲一 英文审校: 张金顺, 黄心中)