第 29 卷 第 2 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 29 No. 2
2008 年 4 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 2008

文章编号: 1000-5013(2008)02-0312-03

Riccati 方程的可积性判据

伍锦棠, 罗明福

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究黎卡提(Riccati)方程 $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ 的可积性判据. 通过找出 $p(x), q(x), r(x)$ 间满足的一些关系式, 找到方程可积的充分条件, 并给出方程通解的积分表达式. 最后, 通过实例进行验证.

关键词: Riccati 方程; 通解; 充分条件; 可积性判据

中图分类号: O 241.8 文献标识码: A

Riccati 型方程 $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ 在一般情况下是不可积的. 1841 年, 数学家 Liouville 证明最简单的一阶线性微分方程 $y' = x^2 + y^2$ 是不可积的. 这是 $p(x) = 1, q(x) = 0, r(x) = x^2$ 时 Riccati 型方程的特殊情况. 本文在文[1-5]的基础上, 通过引入新的变量, 经过一系列的变换, 将 Riccati 型方程变换为变量可分离方程或伯努利(Bernoulli)方程后进行求解.

1 主要结果

为方便起见, 除特别标准外, 文中 p, q, r, z, u 都是 x 的可微函数, 即 $p(x), q(x), r(x), z(x), u(x)$, 而“$\int$”表示被积函数的任一个确定的原函数.

定理 1 若函数 p, q, r 满足条件 $r/p = -(\exp(\int q\mathrm{d}x))^2$, 则 Riccati 型方程可积, 且通积分为

$$y = [\exp(\int q\mathrm{d}x)(1 + C\exp(2\int p\exp\int q\mathrm{d}x\mathrm{d}x)]/[1 - C\exp(2\int p\exp\int q\mathrm{d}x\mathrm{d}x)].$$

定理 2 若函数 p, q, r 满足 $r/p = -\exp(2\int q\mathrm{d}x)$, 则 Riccati 型方程可积且通积分为

$$y = [\exp(\int(2p\exp\int q\mathrm{d}x) + q)\mathrm{d}x)\int p\exp(\int 2p\exp\int q\mathrm{d}x + q)\mathrm{d}x)\mathrm{d}x]^{-1} + \exp(\int q\mathrm{d}x).$$

定理 3 若函数 p, r 满足 $p = -2r/(\int r\mathrm{d}x)^2$, 则方程

$$y' = p\exp(\int - q\mathrm{d}x)y^2 + qy + r\exp\int q\mathrm{d}x \tag{1}$$

可积, 且其通积分为 $y = \exp\int q\mathrm{d}x\left(\dfrac{M}{C - \int pM\mathrm{d}x} - \int r\mathrm{d}x\right)$, 其中 $M = \exp[-\int(2p\int r\mathrm{d}x)\mathrm{d}x]$.

定理 4 若函数 p, q, r 满足 $q\exp\int q\mathrm{d}x = r\int p\mathrm{d}x$, 则方程

$$f'(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = pf(y)^2 + qf(y) + r\exp(\int - q\mathrm{d}x) \tag{2}$$

可积, 且其通积分为

$$f(y) = (\int r\mathrm{d}x + C)/[\exp\int q\mathrm{d}x - \int p\mathrm{d}x(\int r\mathrm{d}x + C)].$$

收稿日期: 2007-06-19
作者简介: 伍锦棠(1977-), 男, 讲师, 主要从事微分方程理论的研究. E-mail: wjt200@tom.com.
基金项目: 国务院侨办科研基金资助项目(03QZR09)

2　定理的证明

2.1　定理 1 的证明

引入变换 $y=Eu$, u 为 x 的连续可微函数, 而 $E=\exp\int q\mathrm{d}x$, 则 $y'=E'u+Eu'$. 把 y, y' 代入 Riccati 型方程可得 $u'=pE(u^2+\frac{r}{pE^2})$. 经化简, $u'=pE(u^2-1)$, 此为变量可分离的方程, 积分后代入 $u=y/E$, 得 $(y-E)/(y+E)=C\exp(2\int pE\,\mathrm{d}x)$, 把 $E=\exp\int q\mathrm{d}x$ 代入并整理, 可得原方程的通积分为

$$y=[\exp(\int q\mathrm{d}x)(1+C\exp[2\int p\exp\int q\mathrm{d}x]\,\mathrm{d}x]/[1-C\exp(2\int p\exp\int q\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x)].$$

定理 1 结论成立.

2.2　定理 2 的证明

令 $y=u+\exp\int q\mathrm{d}x$, 则 $y'=u'+q\exp\int q\mathrm{d}x$, 把 y, y' 代入 Riccati 型方程, 可得

$$u'+q\exp\int q\mathrm{d}x=p(u^2+2u\exp\int q\mathrm{d}x+\exp(2\int q\mathrm{d}x))+q(u+\exp\int q\mathrm{d}x)+r.$$

简为 $u'=pu^2+(2p\exp\int q\mathrm{d}x+q)u$. 此为 $n=2$ 的伯努利方程, 易得解为 $u^{-1}=\exp[-\int(2p\exp\int q\mathrm{d}x+q)\mathrm{d}x]\{C-\int p\exp[\int(2p\exp\int q\mathrm{d}x+q)\,\mathrm{d}x]\}$. 故原方程的通积分为

$$y=\exp[\int(2q\exp\int q\mathrm{d}x+q)\mathrm{d}x][C-\int p\exp[\int(2p\exp\int q\mathrm{d}x+q)\mathrm{d}x]\,\mathrm{d}x]^{-1}+\exp\int q\mathrm{d}x,$$

定理 2 结论成立.

注: 定理 1 与定理 2 对同一方程, 在相同条件下, 采用不同变量替换化为不同可积类型后求解.

2.3　定理 3 的证明

引理　若函数 p, q, r 满足条件 $(q/p)'=-r$, 则 Riccati 型方程可积且通积分为

$$y=[(\exp\int-q\mathrm{d}x)/(C-\int p\exp(-\int q\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x)]-q/p.$$

证明　将 $(q/p)'=-r$, 代入 Riccati 型方程后, 整理可得 $(y+q/p)'=py(y+q/p)$. 令 $u=y+q/p$, 化简为 $u'=pu^2-qu$. 此为 $n=2$ 的伯努利方程, 易得其解为 $u^{-1}=\exp\int q\mathrm{d}x[C-\int p\exp(-\int q\mathrm{d}x)\mathrm{d}x]$, 故 $y=u-q/p=\exp(\int-q\mathrm{d}x)/(C-\int p\exp(-\int q\mathrm{d}x)\mathrm{d}x)-q/p$. 引理结论成立.

定理 3 的证明用常数变易法. 先解方程 $y'=qy+r\exp\int q\mathrm{d}x$, 容易解得 $y=\exp\int q\mathrm{d}x(\int r\mathrm{d}x+C)$. 令上式中的 C 为 $C(x)$, 并关于 x 求导, 可得 $y'=q\exp\int q\mathrm{d}x(\int r\mathrm{d}x+C(x))+\exp\int q\mathrm{d}x(r+C'(x))$. 把 y, y' 代入方程(1)后整理得 $C'(x)=pC^2(x)+2p\int r\mathrm{d}x\,C(x)+p(\int r\mathrm{d}x)^2$. 将上式记为 $C'=p^*C^2+q^*C+r^*$, 由已知条件 $p=-2r/(\int r\mathrm{d}x)^2$, 可得 $(q^*/p^*)'=-r^*$. 故由引理得 $C(x)=M/(C-\int pM\,\mathrm{d}x)-2\int r\mathrm{d}x$, 其中 $M=\exp(-2p\int r\mathrm{d}x)$. 从而方程(1)的通积分为 $y=\exp\int q\mathrm{d}x(M/(C-\int pM\mathrm{d}x)-\int r\mathrm{d}x)$. 定理 3 结论成立.

2.4　定理 4 的证明

先求解方程 $f'(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=pf(y)^2$, 此为变量可分离的方程, 容易求得 $f(y)=1/(C-\int p\mathrm{d}x)$. 令 C 为 $C(x)$, 并关于 x 求导, 得 $f'(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-C'(x)+p}{(C(x)-\int p\mathrm{d}x)^2}$. 把上述两式代入式(2)得

$$C'(x)=-r\exp(\int-q\mathrm{d}x)C^2(x)+$$

$$(2r\exp(\int -q\mathrm{d}x)\int p\mathrm{d}x-q)C(x)+(q-r\exp(\int -q\mathrm{d}x)\int p\mathrm{d}x)\int p\mathrm{d}x,$$

由已知条件 $q\exp\int q\mathrm{d}x=r\int p\mathrm{d}x$, 化简上式为 $C'(x)=-r\exp(\int -q\mathrm{d}x)C^2(x)+qC(x)$. 此为 $n=2$ 的伯努利方程, 可解得 $C(x)=\exp\int q\mathrm{d}x/(\int r\mathrm{d}x+C)$, 故方程(3)的通积分为

$$f(y)=1/(C(x)-\int p\mathrm{d}x)=(\int r\mathrm{d}x+C)/[\exp\int q\mathrm{d}x-\int p\mathrm{d}x(\int r\mathrm{d}x+C)].$$

定理 4 结论成立.

3 应用

例 **1** 求解方程 $y'=xy^2+\frac{1}{x}y-x^3$.

解 此方程中, $p=x$, $q=\frac{1}{x}$, $r=-x^3$, 满足定理 1 的条件 $r/p=-(\exp\int q\mathrm{d}x)^2$, 可得方程的通解为

$$y=\frac{\exp\int(\frac{1}{x})\mathrm{d}x(1+C\exp[2\int x\exp\int(\frac{1}{x})\mathrm{d}x\ \mathrm{d}x])}{1-C\exp[2\int x\exp\int(\frac{1}{x})\mathrm{d}x\ \mathrm{d}x]}=\frac{x(1+C\exp\frac{2x^3}{3})}{1-C\exp\frac{2x^3}{3}}.$$

例 **2** 求解方程 $y'=\frac{-2}{x^3}\exp[-(\frac{1}{3}x^3+x)]y^2+(x^2+1)y+4x\exp(\frac{1}{3}x^3+x)$

解 此方程中 $p=-2/x^3$, $r=4x$, 满足定理 3 的条件 $p=-2r/(\int r\mathrm{d}x)^2$, 故方程可积且通积分为

$$y=\exp(\frac{1}{3}x^3+x)[-2x^2+x^8/(C+x^6/3)].$$

4 结束语

本文利用初等方法, 研究了一类方程的可积性问题, 得到方程可积的若干充分判据, 为将来进一步研究方程可积性打下基础.

参考文献:

[1] 冯录祥. Riccati 方程的若干充分条件[J]. 咸阳师范专科学校学报: 自然科学版, 2000, 15(3): 16-18.

[2] 冯录祥. Riccati 方程可积的一个充分条件[J]. 渭南师范学院学报: 自然科学版, 2003, 18(2): 7-9.

[3] 冯录祥. 一类 Riccati 方程的推广[J]. 咸阳师范学院学报: 自然科学版, 2003, 18(4): 52-53.

[4] 伍锦棠. 徐卫忠. 二阶微分方程的可积性判据[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2005, 26(4): 346-348.

[5] 东北师范大学数学系微分方程教研室. 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1982: 1-83.

Integrable Criterion of Riccati Equation

WU Jin-tang, LUO Ming-fu

(School of Mathematics Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we study the integrable criterion of Riccati equation. By finding the relations among functions $p(x)$, $q(x)$ and $r(x)$, we get some practical integrable sufficient conditions and obtain the integral expressions for these equations' general solution. Finally, some examples are given to verify our conclusion.

Keywords: Riccati equation; general solution; sufficient condition; integrable criterion

(责任编辑: 黄仲一 英文审校: 张金顺, 黄心中)