文章编号: 1000-5013(2008)02-0308-04

Salagean类单叶调和函数的特征

吴瑞溢, 黄心中

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究由Salagean定义的函数族 $S_H(m,n;\alpha)$ 及其子族 $\overline{S}_H(m,n;\alpha)$, 得到 $S_H(m,n;\alpha)$ 类的子族 $S_{HK}(m,n;\alpha)$ 具有拟共形映照的性质. 同时, 研究 $\overline{S}_H(m,n;\alpha)$ 函数类的凸像性质. 对Salagena函数类的偏差定理、拟共形性质及凸像区域性质做进一步的研究, 改进Yalcin得到的一些结果.

关键词: 拟共形映照; 调和拟共形映照; 单叶调和函数; 凸像
中图分类号: O 174.55　　文献标识码: A

Clunie等[1]研究了单叶调和函数, 得到不少类似于单叶函数的性质, 如偏差定理、Bloch常数、凸性区域等. 对单叶调和函数的研究, 一方面, 可以看成是研究单叶函数的推广, 另一方面又与调和拟共形映照有密切的联系. 最近, 在这方面的研究相当活跃, 文[2-4]的结果是很有说服力的. 区域 D 上的复值连续函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是调和的, 意指 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内皆是调和的. 当 D 为任何单连通区域时, $f(z)$ 可表示为 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$, 其中 $h(z)$, $g(z)$ 是 D 上的解析函数. 用 S_H 表示单位圆盘 $U=\{z\,|\,|z|<1\}$ 内调和, 且满足正规化条件 $f(0)=0$, $f_z(0)=1$ 的单叶函数族, 那么对 $f=h+\overline{g}\in S_H$, 解析函数 h 和 g 可表示为

$$h(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k,\qquad g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b_kz^k,\qquad |b_1|<1,\quad z\in U. \tag{1}$$

为进一步研究 S_H 类的几何性质, Salagean[5]引入作用于具有式(1)的调和函数的微分算子, 即

$$D^mf(z)=D^mh(z)+(-1)^m\overline{D^mg(z)}. \tag{2}$$

在式(2)中, $D^mh(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}k^ma_kz^k$, $D^mg(z)=\sum_{k=1}^{\infty}k^mb_kz^k$. 对 $0\leqslant\alpha<1$, $m\in N=\{1,2,3,\cdots\}$, $n\in N_0=\{0,1,2,\cdots\}$, $m>n$, 用 $S_H(m,n;\alpha)$ 表示. $f(z)$ 是由式(1)表示的调和函数, 满足 $\mathrm{Re}\{\frac{D^mf(z)}{D^nf(z)}\}>\alpha$ 用 $\overline{S}_H(m,n;\alpha)$ 表示 $S_H(m,n;\alpha)$ 的子族, $f_m=h+\overline{g}_m\in\overline{S}_H(m,n;\alpha)$, h 和 g_m 可表示为

$$h=z-\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k,\qquad g_m=(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{\infty}b_kz^k,\qquad a_k,\ b_k\geqslant 0. \tag{3}$$

最近, Yalcin[6]对函数族 $S_H(m,n;\alpha)$ 及其子类 $\overline{S}_H(m,n;\alpha)$ 做了进一步深入的研究, 证明了 $S_H(m,n;\alpha)$ 类的单叶性问题. 并对 $\overline{S}_H(m,n;\alpha)$ 类的偏差定理、极值点的条件以及凸像区域等问题进行了系统地研究. 本文将进一步研究 $S_H(m,n;\alpha)$, $\overline{S}_H(m,n;\alpha)$ 两类函数族的性质, 改进文[6]的一些结果.

1 主要结果及其证明

定理1[6] 设 $f=h+\overline{g}$ 为具有形式(1)的调和函数, 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}|a_k|+\frac{k^m-(-1)^{m-n}\alpha k^n}{1-\alpha}|b_k|\right)\leqslant 2, \tag{4}$$

收稿日期: 2007-07-03
作者简介: 吴瑞溢(1982-), 男; 通讯作者: 黄心中(1957-), 男, 教授, 主要从事函数论的研究. E-mail: huangxz@hqu.edu.cn.
基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(Z0511025)

其中, $a_1=1, m\in N, n\in N_0, 0\leqslant\alpha<1, f$ 在 U 内保向单叶调和且 $f\in S_H(m,n;\alpha)$.

定理 2[6]　设 $f_m=h+\overline{g_m}$, 可表示为式(3)的形式, 即 $f_m\in\overline{S}_H(m,n;\alpha)$. 当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty}[(k^m-\alpha k^n)a_k+(k^m-(-1)^{m-n}\alpha k^n)b_k]\leqslant 2(1-\alpha). \tag{5}$$

关于 $\overline{S}_H(m,n;\alpha)$ 类的偏差定理, Yalcin 得到

定理 3[6]　设 $f_m\in\overline{S}_H(m,n;\alpha)$, 对 $|z|=r<1$, 有

$$|f_m(z)|\leqslant(1+b_1)r+\frac{1}{2^n}\left(\frac{1-\alpha}{2^{m-n}-\alpha}-\frac{1-(-1)^{m-1}\alpha}{2^{m-n}-\alpha}b_1\right)r^2,\qquad |z|=r<1,$$

$$|f_m(z)|\geqslant(1+b_1)r-\frac{1}{2^n}\left(\frac{1-\alpha}{2^{m-n}-\alpha}-\frac{1-(-1)^{m-1}\alpha}{2^{m-n}-\alpha}b_1\right)r^2,\qquad |z|=r<1.$$

先引入拟共形映照的定义: 平面区域 Ω 到 Ω' 的一个同胚映照 f, 称为区域 Ω 上的 K-拟共形映照. 如果满足条件: (1) f 在 Ω 上是 ACL 的; (2) 对几乎所有的 $z\in\Omega$, 满足 Beltrami 方程 $f_{\bar z}(z)=\mu(z)\times f_z(z)$, 其中

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\Omega}|\mu(z)|=k<1,\ k=\frac{K-1}{K+1}.$$

对于具有式(1)的调和函数类, 引进 $S_{HK}(m,n;\alpha)$ 为满足 $f(z)\in S_{HK}(m,n;\alpha)$ 条件式(4), 得到 $S_{HK}(m,n;\alpha)$ 函数族的拟共形性质.

定理 4　若 $f=h+\overline{g}\in S_{HK}(m,n;\alpha)$, 则除 $n=0, m=1, \alpha=0$ 外, f 为 K. q. c. 映照.

证明　当 $n=0, m=1, \alpha=0$ 时, 取 $f_0=z+\frac{1}{2}z^{-2}$, 由定义有 $f_0\in S_{HK}(1,0;0)$, 此时 f_0 不是 K. q. c. 映照. 说明 $S_{HK}(1,0;0)$ 并非完全 K. q. c. .

由定理 1 知 $S_{HK}(m,n;\alpha)$ 函数类是单叶调和函数, 下面证明其拟共形映照性质.

当 $n\neq0$ 时, 由

$$\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}=k\frac{k^{m-1}-\alpha k^{n-1}}{1-\alpha}\geqslant k\frac{2^{m-1}-\alpha 2^{n-1}}{1-\alpha}(k\geqslant2),$$

有

$$k\leqslant\frac{1-\alpha}{2^{m-1}-\alpha 2^{n-1}}\left(\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}\right),\qquad k\geqslant2. \tag{6}$$

当 $n=0$ 时,

$$2^{k-1}k\leqslant k^m\leqslant\frac{2^m(1-\alpha)}{2^m-\alpha}\left(\frac{k^m-\alpha}{1-\alpha}\right)(k\geqslant2),$$

有

$$k\leqslant\frac{2(1-\alpha)}{2^m-\alpha}\left(\frac{k^m-\alpha}{1-\alpha}\right),\qquad k\geqslant2 \tag{7}$$

记

$$A(m,n;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1-\alpha}{2^{m-1}-\alpha 2^{n-1}}, & n\neq0\\[2mm] \dfrac{2(1-\alpha)}{2^m-\alpha}, & n=0\end{cases}=\frac{2(1-\alpha)}{2^m-\alpha 2^n},$$

则由式(6), (7)得

$$k\leqslant A(m,n;\alpha)\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha},\qquad k\geqslant2. \tag{8}$$

当 $n=0$ 时,

$$A(m,n;\alpha)=\frac{2(1-\alpha)}{2^m-\alpha}<\frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha}<1,\ (\alpha\neq0).$$

当 $n\neq0$ 时,

$$A(m,n;\alpha)=\frac{2(1-\alpha)}{2^m-\alpha 2^n}=\frac{2(1-\alpha)}{2^n(2^{m-n}-\alpha)}<\frac{1-\alpha}{2-\alpha}\leqslant\frac{1}{2}.$$

因此, 有

$$0<A(m,n;\alpha)<1,\qquad m\neq1,\ n\neq0,\ \alpha\neq0. \tag{9}$$

由式(4)可得

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^m-(-1)^{m-n}\alpha k^n}{1-\alpha}|b_k|\leqslant 1-|b_1|-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}|a_k|, \tag{10}$$

又由式(9),(10)知

$$0<1-A(m,n;\alpha)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}|a_k|<1. \tag{11}$$

故由(8),(9),(10),(11)可推得

$$\left|\frac{g'}{h'}\right|\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{\infty}k|b_k|}{1-\sum_{k=2}^{\infty}k|a_k|}\leqslant\frac{|b_1|+A(m,n;\alpha)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}|b_k|}{1-A(m,n;\alpha)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}|a_k|}\leqslant$$

$$\frac{|b_1|+A(m,n;\alpha)\left(1-|b_1|-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}|a_k|\right)}{1-A(m,n;\alpha)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}|a_k|}=$$

$$\frac{|b_1|+A(m,n;\alpha)(1-|b_1|)-A(m,n;\alpha)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}|a_k|}{1-A(m,n;\alpha)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}|a_k|}=$$

$$1-\frac{(1-|b_1|)(1-A(m,n;\alpha))}{1-A(m,n;\alpha)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}|a_k|}\leqslant 1-(1-|b_1|)(1-A(m,n;\alpha)). \tag{12}$$

故除 $n=0$, $m=1$, $\alpha=0$ 外, $1-(1-|b_1|)(1-A(m,n;\alpha))$ 为严格小于 1 的常数, 从而 f 为 K. q. c. 映照.

当取 $f=z+|b_1|\bar{z}+\frac{(1-|b_1|)(1-\alpha)}{2^m-2^n\alpha}\bar{z}^{-2}$ ($m-n$ 为偶数), 则 $f\in S_{HK}(m,n;\alpha)$, $u_f=\frac{f_{\bar{z}}}{f_z}=|b_1|+\frac{2(1-|b_1|)(1-\alpha)}{2^m-2^n\alpha}\bar{z}$, $\|u_f\|_\infty=|b_1|+\frac{2(1-|b_1|)(1-\alpha)}{2^m-2^n\alpha}=1-(1-|b_1|)(1-A(m,n;\alpha))$, 由此可知此时(12)式的估计是精确的.

Yalcin[6] 考虑了 $S_{HK}(m,n;\alpha)$ 类的凸像区域性质, 证明了的结果为

定理 5[6] 若 $f\in\overline{S}_H(m,n;\alpha)$, 则 f_m 在圆盘 $|z|\leqslant\min_k\left\{\frac{(1-\alpha)(1-b^1)}{k[1-\alpha-(1-(1)^{m-n}\alpha)b_1]}\right\}^{\frac{1}{k-1}}$, $k=2,3,\cdots$ 上凸像.

下面我们改进了定理 5 的结果, 得到

定理 6 若 $f\in\overline{S}_H(m,n;\alpha)$, 则除 $n=0$, $m=1$ 外, $f_m(U)$ 是凸像的.

证明 由文[7]可知, 若 $f=h+\bar{g}\in S_H$, $h(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$, $g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b_kz^k$, 当 $\sum_{k=2}^{\infty}k^2(|a_k|+|b_k|)\leqslant 1-|b_1|$ 时, 则 $f(U)$ 凸像.

首先, 注意到当 $n\neq 0$ 时

$$\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}=\frac{k^n(k^{m-n}-\alpha)}{1-\alpha}>\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha}>k^2; \tag{13}$$

当 $n=0$, $m\geqslant 2$ 时,

$$\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}=\frac{k^m-\alpha}{1-\alpha}>k^2. \tag{14}$$

故当 $n\neq 0$, $m\neq 1$ 时, 由式(13),(14)得

$$\sum_{k=2}^{\infty}k^2(|a_k|+|b_k|)\leqslant\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}(|a_k|+|b_k|)\leqslant$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}|a_k|+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^m-(-1)^{m-n}\alpha k^n}{1-\alpha}|b_k|. \tag{15}$$

故当 $f\in\overline{S}_H(m,n;\alpha)$, $n\neq 0$ 且 $m\neq 1$ 时, 由定理 2 及式(15)得

$$\sum_{k=2}^{\infty}k^2(|a_k|+|b_k|)\leqslant\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^m-\alpha k^n}{1-\alpha}|a_k|+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^m-(-1)^{m-n}\alpha k^n}{1-\alpha}|b_k|\leqslant 1-|b_1|.$$

又因为$\overline{S}_H(m, n; \alpha) \subset S_H$, 故当 $n \neq 0, m \neq 1$ 时, $f_m(U)$ 为凸像. 当 $n = 0, m = 1$ 时, 取 $f_1 = z - \frac{1}{2}z^2$, 则 $f_1 \in \overline{S}_H(1, 0; 0)$, 但 $f_1(U)$ 非凸.

对 $\overline{S}_H(m, n; \alpha)$ 的偏差定理, 定理 3 已给出很好的估计, 但没有指出精确性. 为此, 有

定理 7　设 $f_m \in \overline{S}_H(m, n; \alpha)$, 对 $|z| = r - 1$, 有

$$|f_m(z) - z| \leqslant b_1 r + \frac{1}{2^n}\left(\frac{1-\alpha}{2^{m-n}-\alpha} - \frac{1-(-1)^{m-n}\alpha}{2^{m-n}-\alpha}b_1\right)r^2, \qquad |z| = r < 1. \tag{16}$$

等号可由下面的函数达到, $f_m = z + b_1\overline{z} + \frac{1-\alpha}{2^m-\alpha 2^n}(1-b_1)^{-2}z$, $m - 1$, $m - n$ 为偶数.

证明　式(16)的证明可由定理 3 给出, 下面主要给出达到等号的函数来. 当 $m - 1$, $m - n$ 为偶数时, 对任何 $f_m \in \overline{S}_H(m, n; \alpha)$, $f_m = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k}$, 式(5)可表达为 $\sum_{k=1}^{\infty}[(k^m - \alpha k^n)a_k + (k^m - \alpha k^n)b_k] \leqslant 2(1-\alpha)$. 若取 $f_m = z + b_1\overline{z}\,\frac{1-\alpha}{2^m-\alpha 2^n}(1-b_1)^{-2}z$, 则检验条件有 $\sum_{k=1}^{\infty}[(k^m - \alpha k^n)a_k + (k^m - \alpha k^n)b_k] = 1 - \alpha + (1-\alpha)b_1 + (2^m - \alpha 2^n)\frac{1-\alpha}{2^m-\alpha 2^n}(1-b_1) = 2(1-\alpha)$. 因此, 由定理 2 可知, $f_m \in \overline{S}_H(m, n; \alpha)$, 当取 $z = r$ 时, $|f_m(z) - z| = b_1 r + \frac{1-\alpha}{2^m-\alpha 2^n}(1-b_1)r^2$, 式(16)可取得等号.

参考文献:

[1] CLUNIE J, SHELL-SMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math, 1984(9): 3-25.

[2] CHEN H, GAUTHIER P M, HENGARTNER W. Bloch constants for planar harmonic mappings[J]. Poc Amer Math Soc, 2000, 128(11): 3231-3240.

[3] PAVLOVIC M. Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disk[J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2002(27): 365-372.

[4] KALAJ D, PAVLOVIC M. Boundary correspondence under quasiconformal harmonic diffeomorphisms of a half-plane[J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2005, (30): 159-165.

[5] SALAGEAN G S. Subclass of univalent functions[M]. New York: Springer-Verlag, 1983: 362-372.

[6] YALCIN S. A new class of Salagean-type harmonic univalent functions[J]. Applied Mathematics Letters, 2005 (18): 191-198.

[7] JAHANGIRI J, SILVERMAN H. Harmonic close-to-convex mappings[J]. Journal of applied mathematics and stochastic analysis, 2002, 15(1): 23-28.

The Characteristic of Salagean-Type Univalent Harmonic Functions

WU Rui-yi, HUANG Xin-zhong

(School of Mathematics Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we mainly investigate the classes $S_H(m, n; \alpha)$ and $\overline{S}_H(m, n; \alpha)$ defined by Salagean. It is proved that functions belonging to $S_{HK}(m, n; \alpha)$, which is a subclass of $S_H(m, n; \alpha)$, are quasiconformal mappings. Meanwhile, we obtain the convex characteristic of the class $\overline{S}_H(m, n; \alpha)$. Our results improve some results of Yalcin′s.

Keywords: quasiconformal mapping; harmonic quasiconformal functions; convex

(责任编辑: 黄仲一　　英文审校: 张金顺, 黄心中)