第 29 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 29　No. 2
2008 年 4 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 2008

文章编号:　1000-5013(2008)02-0305-03

具非线性耗散项的 *p*- 方程组的整体光滑解

陈安全, 郑永树

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362011)

摘要:　研究具非线性耗散项的 p- 方程组的初值问题. 在非线性耗散项较弱的假设条件下, 解除了对初值的 C^1- 模的小性限制. 即对初值的 C^0- 模不加小性限制, 而需其一阶导数的 C^0- 模足够小. 运用经典的特征线法和极值原理, 分别得到解的 C^0- 模估计和偏导数的 C^0- 模估计. 根据光滑解的局部存在性定理和先验估计的结果, 利用逐步延拓法, 证明初值问题的整体光滑解的唯一存在性.

关键词:　非线性耗散项; p- 方程组; 先验估计; 整体光滑解

中图分类号:　O 241.7　　　文献标识码:　A

1　问题的提出

考虑具非线性耗散项的 p- 方程组的初值问题, 即

$$u_t + p(v)_x = -f(u),\qquad v_t - u_x = 0,\qquad (t, x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \tag{1}$$

$$u(0, x) = u_0(x),\qquad v(0, x) = v_0(x),\qquad x \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

方程(1)可描述带耗散的一维等熵气体流动, 其中 v 为气流速度($v = 1/\rho$), ρ 为气体密度, $p(v)$ 为气体压力, $f(u)$ 为耗散项. 文[1]首次研究了 $f(u)$ 为非线性函数, 并假设 $\int_0^1 \sqrt{-p'(\tau)}\,\mathrm{d}\tau < \infty$, 若 $p(v)$ 为 γ-律, 它相当于 $0 < \gamma < 1$ 的情形; 另一方面, 文[1]对初值的 C^0- 模作了小性限制. 本文考虑一般的 $p(v)$, 解除了对初值的 C^0- 模的小性假设, 而假设其一阶导数适当小. 利用经典的特征线法获得解的模估计, 应用极值原理得到解的 C^0- 偏导数的一致估计. 援用 C^1 解的局部存在性定理和先验估计的结果, 证明了初值问题(1), (2)的整体光滑解的存在性[2].

2　主要结果

首先假设方程(1)满足条件(H_1) $p(v) \in C^2(0, \infty)$, $p'(v) < 0$, $\forall v \in (0, \infty)$; ($\mathrm{H}_2$) $f(u) \in C^1(\mathbf{R})$, $f(0) = 0$, $f'(u) \geqslant 2\alpha$, $\alpha > 0$ 为常数. 因此, 方程(1)的特征值为 $\lambda = -\sqrt{-p'(v)}$, $\mu = \sqrt{-p'(v)}$. 相应的 Riemann 不变量 $r = u + \varnothing(v)$, $s = u - \varnothing(v)$. 其中, $\varnothing(v) = \int_1^v \sqrt{-p'(\tau)}\,\mathrm{d}\tau$. 在经典解的意义下, 初值问题(1), (2) 可化为等价的初值问题, 即

$$r_t + \lambda r_x = -f\left(\frac{r+s}{2}\right),\qquad s_t + \mu s_x = -f\left(\frac{r+s}{2}\right). \tag{3}$$

$$r(0, x) = r_0(x),\qquad s(0, x) = s_0(x). \tag{4}$$

其中, $r_0(x) = u_0(x) + \varnothing(v_0(x))$, $s_0(x) = u_0(x) - \varnothing(v_0(x))$. 进一步假设初值满足条件($\mathrm{H}_3$) $u_0(x)$, $v_0(x) \in C_b^1(\mathbf{R})$, 且 $0 < v_* \leqslant v_0(x) \leqslant v^*$, 其中 $C_b^1(\mathbf{R})$ 表示 $C^1(\mathbf{R})$ 中的有界集, 且

$$\max\{\sup_x |r_0(x)|,\ \sup_x |s_0(x)|\} < \min\{-\varnothing(0), \varnothing(\infty)\}. \tag{5}$$

收稿日期:　2007-02-19

作者简介:　陈安全(1975-), 男, 现为厦门理工学院(福建 厦门 361000)讲师, 主要从事经济统计和偏微分方程的研究. E-mail: axcaq@tom.com.

基金项目:　福建省自然科学基金资助项目(A97020); 厦门市 2006 年度第三批科技计划项目(3502Z2006020)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

在上述的假设下, 我们得出

定理　假设条件(H_1), (H_2)和(H_3)成立, 如果$\sup_x|r'_0(x)|+\sup_x|s'_0(x)|$足够小, 则初值问题(1), (2)(等价于式(3), (4))在上半平面$t\geqslant 0$存在唯一的整体光滑解.

3　定理的证明

3.1　特征线法及解的C^0-模估计

引理1　在假设条件(H_1), (H_2)和(H_3)下, 初值问题(3), (4)在光滑解存在区域内成立. 即

$$|r(t,x)|\leqslant M_0,\qquad |s(t,x)|\leqslant M_0,\qquad M_0=\max\{\sup_x|r_0(x)|,\ \sup_x|s_0(x)|\}. \tag{6}$$

证明　由条件(H_2), 方程组(3)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}_1t}=-\frac{1}{2}f'(\theta u)(r+s),\qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}_2t}=-\frac{1}{2}f'(\theta u)(r+s). \tag{7}$$

上式中, $0<\theta=\theta(r,s)<1$, $f'(u)=\dfrac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_1t}=\dfrac{\partial}{\partial t}+\lambda\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_2t}=\dfrac{\partial}{\partial t}+\mu\dfrac{\partial}{\partial x}$. 令$F_1(t)=\sup_x f'(u(t,x))$, $\bar{r}=r\exp\{\frac{1}{2}\int_0^t F_1(\tau)\mathrm{d}\tau\}$, $\bar{s}=s\exp\{\frac{1}{2}\int_0^t F_1(\tau)\mathrm{d}\tau\}$. 于是, 由式(7)可得到

$$\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}_1t}=\frac{1}{2}(F_1(t)-f'(\theta u))\bar{r}-\frac{1}{2}f'(\theta u)\bar{s},\qquad \frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}_2t}=\frac{1}{2}(F_1(t)-f'(\theta u))\bar{s}-\frac{1}{2}f'(\theta u)\bar{r}. \tag{8}$$

又令$h(t)=\max\{\sup_x|\bar{r}(t,x)|,\ \sup_x|\bar{s}(t,x)|\}$. 设$(t,x)$为$C^1$-解存在区域内的任意一点, 过点$(t,x)$作$\lambda$特征线和$\mu$特征线, 分别交于$x$轴的点$(0,\alpha)$和$(0,\beta)$. 沿特征线从0到$t$分别积分式(8), 可得到

$$\left.\begin{aligned}\bar{r}(t,x)&=r_0(\alpha)+\int_0^t\{\frac{1}{2}(F_1-f'(\theta u))\bar{r}-\frac{1}{2}f'(\theta u)\bar{s}\}(t,x_\lambda(\tau,\alpha))\mathrm{d}\tau,\\ \bar{s}(t,x)&=s_0(\beta)+\int_0^t\{\frac{1}{2}(F_1-f'(\theta u))\bar{s}-\frac{1}{2}f'(\theta u)\bar{r}\}(t,x_\mu(\tau,\beta))\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

由于有$f'(u)\geqslant 2c>0$, 则

$$\left.\begin{aligned}|(F_1-f'(\theta u))\bar{r}-f'(\theta u)\bar{s}|&\leqslant(F_1-f'(\theta u))|\bar{r}|+f'(\theta u)|\bar{s}|\leqslant F_1h,\\ |(F_1-f'(\theta u))\bar{s}-f'(\theta u)\bar{r}|&\leqslant(F_1-f'(\theta u))|\bar{s}|+f'(\theta u)|\bar{r}|\leqslant F_1h.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

因此, 由M_0的定义和式(9), (10)可得到

$$|\bar{r}(t,x)|\leqslant M_0+\frac{1}{2}\int_0^t F_1(\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad |\bar{s}(t,x)|\leqslant M_0+\frac{1}{2}\int_0^t F_1(\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{11}$$

进而得到$h(t)\leqslant M_0+\frac{1}{2}\int_0^t F_1(\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau$ 所以, 有$h(t)\leqslant M_0\exp[\frac{1}{2}\int_0^t F_1(\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau]$. 再由此式和式(9), 可得到$|r(t,x)|\leqslant M_0$, $|s(t,x)|\leqslant M_0$. 引理1证毕.

推论　在引理1的假设之下, 初值问题(1), (2)在光滑解存在区域内成立, 有

$$|u(t,x)|\leqslant M_0,\qquad 0<\underline{V}\leqslant v(t,x)\leqslant\overline{V}. \tag{12}$$

其中, $0<\underline{V}<1$, $1<\overline{V}<\infty$, $\varnothing(\underline{V})=\int_1^{\underline{V}}\sqrt{-p'(\tau)}\mathrm{d}\tau=-M_0$, $\varnothing(\overline{V})=\int_1^{\overline{V}}\sqrt{-p'(\tau)}\mathrm{d}\tau=M_0$.

3.2　极值原理及解的偏导数估计

用文[3-5]的极值原理的证法, 可以证得如下命题.

命题　考虑初值问题

$$U_t+\lambda(t,x)U_x=A(t,x)(V-U),\qquad V_t+\mu(t,x)V_x=B(t,x)(U-V),\qquad (t,x)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R},$$
$$U(0,x)=U_0(x),\qquad V(0,x)=V_0(x),\qquad x\in\mathbf{R}.$$

上式中, $\lambda(t,x)$, $\mu(t,x)$, $A(t,x)$, $B(t,x)$为有界的连续函数, 而且$A(t,x)\geqslant 0$, $B(t,x)\geqslant 0$. 如果$(U(t,x),V(t,x))$为其C^1-解, 则在其存在区域内成立, 有$m\leqslant U(t,x)$, $V(t,x)\leqslant M$, 且$m=\min\{\inf_x U_0(x),\ \inf_x V_0(x)\}$, $M=\max\{\sup_x U_0(x),\ \sup_x V_0(x)\}$. 为简略起见, 这里不重复证明这个命题.

引理2　在引理1的假设之下, 如果

$$M_1=\sup_x|r'_0(x)|+\sup_x|s'_0(x)| \tag{13}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

足够小, 初值问题(3), (4)在光滑解的存在区域内成立, 有$|r_x(t,x)| \leqslant D_1$, $|s_x(t,x)| \leqslant D_1$. 其中 $D_1 = \frac{\mu_0 M_1}{\mu_m}$, $\mu_0 = \max\limits_{v_* \leqslant v \leqslant v} \mu(v)$, $\mu_m = \min\limits_{V \leqslant v \leqslant V} \mu(v)$.

证明　由方程(1)的特征值、Riemann 变量和式(3), 通过直接计算, 易知 $-\lambda = \lambda = \mu_r = -\mu_s = \frac{p''(v)}{4p'(v)}$. $\frac{dr_x}{d_1 t} = -\mu_s r_x^2 + \mu_s r_x s_x - \frac{1}{2}f'(u) r_x - \frac{1}{2}f'(u) s_x$, $\frac{ds_x}{d_2 t} = -\mu_s r_x^2 + \mu_s r_x s_x - \frac{1}{2}f'(u) r_x - \frac{1}{2}f'(u) s_x$, $\frac{dv}{d_1 t} = s_x$, $\frac{dv}{d_2 t} = r_x$, $\frac{d\mu}{d_1 t} = -2\mu_s \mu s_x$, $\frac{d\mu}{d_2 t} = -2\mu_s \mu r_x$. 则由式(13)可得到

$$\frac{dU}{d_1 t} = \left(\frac{1}{2}f'(u) + \mu_s r_x\right)(V - U), \qquad \frac{dV}{d_2 t} = \left(\frac{1}{2}f'(u) + \mu_s s_x\right)(U - V). \tag{14}$$

先验假设$|\mu_s r_x| \leqslant \frac{\alpha}{2}$, $|\mu_s s_x| \leqslant \frac{\alpha}{2}$. 根据假设条件($H_2$)及先验假设, 则有

$$\frac{1}{2}f'(u) + \mu_s r_x \geqslant \frac{\alpha}{2} > 0, \qquad \frac{1}{2}f'(u) + \mu_s s_x \geqslant \frac{\alpha}{2} > 0. \tag{15}$$

再由式(14), (15)和命题, 可得到$|U(t,x)|$, $|V(t,x)| \leqslant \max\{\sup\limits_x |U(0,x)|, \sup\limits_x |V(0,x)|\}$. 即有

$$|(\mu r_x)(t,x)|,\ |(\mu s_x)(t,x)| \leqslant \max\{\sup_x |\mu(v_0(x)) r'_0(x)|, \sup_x |\mu(v_0(x)) s'_0(x)|\} \leqslant \mu_0 M_1.$$

所以有$|r_x(t,x)|$, $|s_x(t,x)| \leqslant \frac{\mu_0 M_1}{\mu_m} = D_1$. 因此, 可以确定往证先验假设是合理的. 事实上, 令 $K = \frac{1}{4} \max\limits_{V \leqslant v \leqslant V} \left| \frac{p''(v)}{(-p'(v))^{3/2}} \right|$, 则可得到 $|(\mu_s r_x)(t,x)| = \left|\left(\frac{-p''(v)}{4(-p'(v))^{3/2}} \mu r_x\right)(t,x)\right| \leqslant K\mu_0 M_1$. 因此, 只要 M_1 足够小, 则 $K\mu_0 M_1 \leqslant \alpha/2$. 所以, $|(\mu_s r_x)(t,x)| \leqslant \alpha/2$. 类似可验证$|(\mu_s s_x)(t,x)| \leqslant \alpha/2$, 引理 2 证毕.

根据经典解的局部存在性定理和引理 1, 2 , 可以得到定理 1 成立.

参考文献:

[1] YANG Tong, ZHU Chang-jiang, ZHAO Hui-jiang. Global smooth solutions for a class of quasilinear hyperbolic systems with dissipative terms[J]. Proc Roy Soc Edinburgh, 1997, 127A: 1 311-1 324.

[2] 陈安全, 郑永树. 强迫拟线性波动方程的初值问题[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2006, 27(4): 348-350.

[3] 朱长江, 李才中, 赵会江. 一类非严格双曲型方程整体光滑解的存在性[J]. 数学物理学报, 1994, 14(1): 96-106.

[4] ZHU Chang-jiang, Global resolvability for a viscoelastic model with relaxation[j]. Proc Roy Soc Edinburgh, 1995, 125, 1 277-1 285.

[5] 朱长江, 赵会江. 一类拟线性波动方程解的存在性、唯一性和稳定性[J]. 数学年刊, 1997, 18(2): 223-234.

The Global Smooth Solutions for the Initial Value Problem of the Nonlinear Damped p-System

CHEN An-quan, ZHENG Yong-shu

(School of Mathematics Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: We consider the initial value problem for the nonlinear damped p-system. We prove thatit doesn′t require that the C^0-norm of the initial data is small, while it just needs the C^0-norm of the first order derivative to be sufficiently small. Utilizing some priori estimate, we prove he existences of the global smooth solution for the initial value problem. In order to get a priori estimate of the solutions, by the classical characteristic method, which is used to get the priori C^0-norm estimate on the solutions, and by applying the maximum principle, we get uniformly estimates on the derivatives of the solutions with respect to x.

Keywords: nonlinear dissipation; p-system; priori estimate; globally smooth solution

(责任编辑: 黄仲一　　英文审校: 张金顺, 黄心中)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net