第 28 卷 第 4 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 28 No. 4
2007 年 10 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Oct. 2007

文章编号: 1000-5013(2007)04-0441-03

定时截尾的 Weibull 分布双参数近似估计

田 霆

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 利用纠偏思想, 讨论定时截尾情形下 Weibull 分布的双参数的近似估计, 并进行 Monte-Carlo 数值模拟试验. 从模拟实验结果与 Sirvanci 提出的方法的模拟结果相比可以看出, 纠偏法有时偏差较大, 有时偏差较小. 当产品数 n 比较大时, 参数估计的精度还是令人满意的. 分析表明, 所给出的两参数估计方法是可行的.

关键词: Weibull 分布; 定时截尾; 标准指数分布; 近似估计

中图分类号: O 213.2; O 242 文献标识码: A

在可靠性寿命试验中, 人们经常采用定时或定数截尾试验. 当产品寿命服从 Weibull 分布时, 在定数截尾情况下, 已有比较完善的结果. 定时截尾时, 由于失效产品个数具有随机性, 因此给统计分析带来很大难度. 本文利用纠偏的思想, 构造一个新的统计量, 给出参数的一种近似估计.

1 单参数指数尺度参数的估计

若 T 服从 $W(m, \eta)$, 它的分布函数为 $F(t) = 1 - \exp\{-(\frac{t}{\eta})^m\}$, $t \geqslant 0$. 其中, m 为形状参数, $m > 0$; η 为刻度参数, $\eta > 0$. 易知, $W = (\frac{T}{\eta})^m$ 服从标准指数分布[1].

若 T 服从单参数指数分布, 其密度函数形式[2] $f(t) = \frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\theta}}$, $t \geqslant 0$. 记定时截尾时间为 τ, 在 $(0, \tau]$ 时间内, 产品的失效率为 p, $A = (T < \tau)$, $I_A(\omega)$ 为产品在 $(0, \tau]$ 内失效的示性函数(简记 I), 即

$$p = P(T < \tau) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{\theta}}, \qquad I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases} \tag{1}$$

则 $E[(T - \tau)I] = E[T\tau] - \tau p$, 其中 $E(TI) = \int_0^{\tau} \frac{t}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\theta}}\mathrm{d}t = -\tau + \theta p + \tau p$. 由式(1)可得, $\tau = -\theta \times \ln(1 - p)$, 即有 $E[(T - \tau)I] = -\tau + \theta p = \theta p h(p)$. 其中, $h(p) = 1 + \frac{1}{p}\ln(1 - p)$. 现从分布密度函数形成中抽取 n 个产品做试验, 其失效时间分别为 $t'_1, \dots, t'_n$, 由矩估计的思想, 我们可用统计量 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t'_i - \tau)I_i$ 无偏估计. 故可令 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t'_i - \tau)I_i = \theta p h(p)$.

2 Weibull 分布两参数的近似估计

现从分布函数中取 n 个产品同时参加定时截尾试验, 其失效时间分别为 $t_1, \dots, t_n$, 截尾时间设为 τ, 而 $(\frac{t_1}{\eta})^m, \dots, (\frac{t_n}{\eta})^m, (\frac{\tau}{\eta})^m$ 分别为服从标准指数分布的 n 个产品相应的失效时间及截尾时间. 故当 $\theta =$

收稿日期: 2006-10-27

作者简介: 田 霆(1972-), 男, 讲师, 主要从事产品可靠性的研究. E-mail: tianting1972928@sohu.com.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(Z0511027)

1时，可得到$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((\frac{t_i}{\eta})^m-(\frac{\tau}{\eta})^m)I_i=ph(p)$. 我们用 r 记在$(0,\tau]$时间内的失效产品数, 如果 r 选取合理的话, 在$(0,\tau]$内就有一定比例的产品失效. 从而我们可用失效率$\frac{r}{n}$来估计失效概率p, 这样就可以得到η, m的第1个估计式为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i^m-\tau^m)I_i=\eta^m ph(p),\qquad 0<r<n. \tag{2}$$

当$r=0$时，在$(0,\tau]$内无产品失效，则$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i-\tau)I_i=0$, 用它估计$\theta ph(p)$无意义; 而当$r=n$时，在$(0,\tau]$内产品均失效, $\frac{r}{n}=1$, $h(1)$无意义. r 服从$B(n,p)$分布, 在$0<r<n$条件下, $E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((\frac{t_i}{\eta})^m-(\frac{\tau}{\eta})^m)I_i\mid 0<r<n)=\frac{1}{P(0<r<n)}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}P(r=k)E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((\frac{t_i}{\eta})^m-(\frac{\tau}{\eta})^m)I_i\mid r=k]=\frac{1}{1-p^n-q^n}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k p^k q^{n-k}E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((\frac{t_i}{\eta})^m-(\frac{\tau}{\eta})^m)I_i\mid r=k]$. 其中, $q=1-p$. 由文[3]可知, 若从标准指数分布中抽取 n 个产品做定时截尾试验(截尾时间为τ'), 其失效时间分别为$t'_1,\cdots,t'_n$. 则

$$E[\sum_{i=1}^{n}(t'_i-\tau')I_i\mid r=k]=kE[(t'_i-\tau')I_i\mid I_i=1]=\frac{k}{p}[(t_i-\tau)I_i]=kh(p),$$

有
$$E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((\frac{t_i}{\eta})^m-(\frac{\tau}{\eta})^m)I_i\mid 0<r<n)=\frac{1}{1-p^n-q^n}\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k p^k q^{n-k}kh(p). \tag{3}$$

由于$\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k p^k q^{n-k}k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}k-C_n^0p^0q^n-C_n^np^nq^0=np-p^n-q^n$, 所以式(3)为

$$\frac{np-p^n-q^n}{1-p^n-q^n}h(p)=\frac{n-p^{n-1}-q^np^{-1}}{1-p^n-q^n}ph(p)=G(p)ph(p). \tag{4}$$

上式中, $G(p)=\frac{n-p^{n-1}-q^np^{-1}}{1-p^n-q^n}$, 我们可以将$G(p)$视为修偏因子. 而在 Weibull 分布中有如下结论[4]:

若$t_1,\cdots,t_n$服从渐进 Weibull(m,η)分布, 则(1) $t_{(1)}$服从 Weibull$(m,\frac{\eta}{n^{\frac{1}{m}}})$分布, $E(t_{(1)})=\eta\Gamma(1+\frac{1}{m})$; (2) 当$n\to+\infty$时, 有$|t_{(1)}-E(t_{(1)})|\to 0$(渐进估计). 其中, $t_{(1)}$为样本的最小次序统计量. 联立式(4)可得, 一个估计式$t_{(1)}=\eta\Gamma(1+\frac{1}{m})$和$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i^m-\tau^m)I_i=\eta^m G(p)ph(p)$. 这两方程形式很复杂, 没有显式解, 但利用数值解法, 并借助于计算机总可解出 m 及η的估计值$\hat{m}$及$\hat{\eta}$.

3 Monte-Carlo 模拟

本文作了大量的 Monte-Carlo 模拟实验, 结果表明, 上述两方程组的解存在且唯一. 部分模拟结果与文[2]方法的模拟结果比较, 如表1所示. 表1中, Δm, $\Delta\eta$分别为m, η的偏差. $n=20$. 在1~10组中

表1 纠编法与文[2]方法模拟结果比较

Tab.1 Comparation of the simulation given the modifing and the thesls

序号	r	纠偏法		Δm		$\Delta\eta$	
		m	η	纠偏法	文[2]的方法	纠偏法	文[2]的方法
1	14	1.033 6	1.224 6	0.033 6	0.021 3	0.224 6	0.125 6
2	15	0.910 7	1.014 3	−0.089 3	0.010 3	0.014 3	−0.001 7
3	15	1.045 0	1.156 1	0.045 0	−0.876 0	0.156 1	0.138 5
4	15	1.037 4	1.105 3	0.037 4	0.012 6	0.105 3	−0.0284
5	12	0.840 7	0.835 4	−0.159 3	0.143 2	−0.164 6	0.132 6
6	13	0.854 6	0.937 5	−0.145 4	−0.126 8	−0.062 5	0.052 1
7	16	1.211 9	1.304 6	0.211 9	0.314 5	0.304 6	0.216 8
8	10	0.630 0	0.751 0	−0.369 1	0.014 5	−0.249 0	0.118 7
9	11	0.809 3	0.784 1	−0.190 7	0.145 2	−0.215 9	0.213 6

续表

Continued table

序号	r	纠偏法		Δm		$\Delta\eta$	
		m	η	纠偏法	文[2]的方法	纠偏法	文[2]的方法
10	14	1.077 6	1.042 1	0.077 6	-0.012 3	0.042 1	-0.203 1
11	15	1.874 1	9.614 0	-0.125 9	0.148 9	0.386 0	0.254 1
12	15	1.884 3	9.443 2	-0.115 7	0.194 2	-0.556 8	0.110 2
13	11	2.075 5	10.001 2	0.075 5	0.082 0	0.001 2	0.002 6
14	12	1.954 3	9.887 6	0.045 7	0.032 0	-0.112 4	0.014 9
15	13	2.161 0	9.457 8	0.161 0	-0.025 9	-0.542 2	0.216 2
16	13	1.872 0	9.734 2	-0.128 0	0.0149 5	-0.265 8	0.256 8
17	12	1.757 1	9.876 5	-0.242 9	-0.021 4	-0.123 5	0.342 6
18	14	2.081 2	8.433 8	0.081 2	-0.001 2	-1.566 2	0.325 4
19	11	2.045 9	9.921 9	0.045 9	0.548 7	-0.078 1	-0.015 3
20	14	1.855 4	10.054 6	0.144 6	0.012 8	0.054 6	0.079 5
21	13	0.251 4	0.451 3	0.001 4	0.015 2	-0.048 7	0.012 4
22	13	0.267 7	0.478 2	0.017 7	0.115 8	-0.021 8	0.149 1
23	16	0.202 8	0.503 4	-0.047 2	0.015 6	0.003 4	0.120 6
24	15	0.235 9	0.481 8	-0.014 1	0.214 0	-0.019 2	-0.015 1
25	11	0.260 1	0.517 0	0.009 9	0.016 2	0.017 0	-0.113 2
26	12	0.249 7	0.513 4	-0.000 3	0.015 2	0.013 4	0.568 1
27	14	0.243 7	0.486 7	-0.056 3	0.011 8	-0.013 3	0.210 6
28	15	0.237 5	0.494 3	-0.012 5	-0.021 5	-0.005 7	0.104 2
29	13	0.250 2	0.501 5	0.000 2	-0.016 4	0.001 5	0.004 3
30	11	0.251 2	0.480 7	0.001 2	-0.002 7	-0.019 3	0.116 7

取 $m=1.0$, $\eta=1.0$, $\tau=1.2$; 在 11~20 组中取 $m=2.0$, $\eta=10$, $\tau=10$; 在 21~30 组中取 $m=0.25$, $\eta=0.5$, $\tau=10$. 从表 1 可看出, 与文[2]所述方法的结果相比, 纠偏法有时偏差较大, 有时偏差较小. 当 n 比较大时, 参数估计的精度还是令人满意的. 因此, 这种利用纠偏的思想求出参数的估计的方法是可行的.

参考文献:

[1] 茆诗松, 王玲玲. 可靠性统计[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1984: 136-156.

[2] RVANCI M, YANG G. Estimation of the Weibull parameters under type-I censoring[J]. JASA, 1984, 79: 183-187.

[3] 翟伟丽, 茆诗松. 定时截尾场合下双参数指数分布的参数估计[J]. 应用概率统计, 2002, 5(2): 197-204.

[4] 徐晓岭. 两参数 Weibull 分布定数、定时截尾下序进应力加速应力加速寿命试验的统计分析[J]. 数理统计与应用概率统计, 1995, 3(1): 87-93.

Approximate Parameter Estimation of Weibull Distribution under Type-I Censoring Sample

TIAN Ting

(School of Mathematics Science, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Approximate parameter estimation is provided and the Mante-Carlo simulation is done for two parameters Weibull distribution under type-I censoring by the thought of modifying. It is shown by comparing our simulation with the simulation provided by Sirvanci: The deviation sometimes is large and sometimes is small. However, the precision of the parameter estimation under a large amount of samples is all right. It is also shown by the analysis that the estimation method with two parameters is suitable.

Keywords: Weibull distribution; type-I censoring; normal exponential distribution; approximate estimation

(责任编辑: 黄仲一)