文章编号: 1000-5013(2007)04-0437-04

具有偏差变元的二阶中立型泛函微分方程周期解

张 莉, 王全义

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 利用一些分析技巧及抽象连续性原理, 研究一类二阶中立型泛函微分方程周期解的存在性, 得到一个保证该类方程周期解存在的充分条件.

关键词: 中立型泛函微分方程; 周期解; k-集压缩算子; 偏差变元

中图分类号: O 175.14 文献标识码: A

最近, 文[1]研究了二阶中立型泛函微分方程

$$[x(t)+cx(t-\sigma)]''+g(t,x(t-\tau))=p(t)$$

的周期解的存在性问题. 其中 c, σ, τ 均为常数, $p(t)$ 以 2π 为周期且 $\int_0^{2\pi}p(t)\mathrm{d}t=0$. 文[2]利用 k-集压缩算子抽象连续性定理, 研究二阶微分方程

$$[x(t)+c(t)x(t-\tau(t))]''+g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),x'(t-\tau_2(t)))=p(t) \tag{1}$$

的周期解存在性问题. 其中, $c(t)$, $\tau(t)\in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$, $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$, 且均以 $T(T>0)$ 为周期, $1-\tau'>0$, $p(t)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$, $\int_0^T p(t)\mathrm{d}t=0$. $g(t,x_1,x_2,x_3)$ 是 $\mathbf{R}^4$ 上的实连续函数, 且对 t 是 T 周期的. 我们利用一些分析技巧, 进一步讨论方程(1)的周期解的存在性, 并且所得的结果不同于文[2]的结果.

1 预备知识

定义 1 设 X 是一个 Banach 空间, D 是 X 的有界子集. 令

$$\left.\begin{aligned}\alpha_X(D)=\inf\{\delta>0\mid D\ \text{可表示为有限个集合的并}: D=\bigcup_{i=1}^{n}D_i,\\ \text{并且每个}\ D_i\ \text{的直径}\ \mathrm{diam}_X(D_i)\leqslant\delta\},\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

则称 α_X 为 D 的非紧性测度或 Kuratowski 距离.

定义 2 设 X, Y 均是 Banach 空间, $D\subset X$, 算子 $N:D\to Y$ 是连续且有界. 如果存在常数 $k\geqslant 0$, 对任何有界集 $E\subset D$, 有 $\alpha_Y(N(E))\leqslant k\alpha_X(E)$, 则称 N 是 D 上的 k-集压缩算子[3-4].

如果 $L:\mathrm{dom}\,L\subset X\to Y$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子, 由文[3]可知道, 对于任何有界集 $B\subset\mathrm{dom}\,L$, $\sup\{r\geqslant 0\mid r\alpha_X(B)\leqslant\alpha_Y(L(B))\}$ 是存在的, 因而我们可定义

$$l(L)=\sup\{r\geqslant 0\mid r\alpha_X(B)\leqslant\alpha_Y(L(B)),\ \text{对任何有界集}\ B\subset\mathrm{dom}\,L\}. \tag{3}$$

引理 1[5] $L:\mathrm{dom}\,L\subset X\to Y$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子, $y\in Y$ 是一固定点. 假设 $N:\overline{\Omega}\to Y$ 是 k-集压缩算子, $k<l(L)$, $\Omega\subset X$ 是有界的且关于 $0\in\Omega$ 对称的开子集, 满足(1) $Lx\neq\lambda Nx+\lambda y$, $\forall x\in\partial\Omega$, $\forall\lambda\in(0,1)$; (2) $[QNx+Qy,x]\cdot[QN(-x)+Qy,x]<0$, $\forall x\in\partial\Omega\cap\ker L$. 其中, $[\cdot,\cdot]$ 是 $Y\times X$ 的某双线性泛函, $Q:Y\to\mathrm{coker}\,L$ 是投影算子. 那么, 至少存在一个 $x\in\overline{\Omega}$, 满足 $Lx=Nx+y$.

收稿日期: 2006-12-21

作者简介: 张 莉(1978-), 女, 硕士研究生, 主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究; 通信作者: 王全义(1955-), 男, 教授, E-mail: qywang@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(Z0511026)

假设, $X=\{x\mid x(t)\in C^2(\mathbf{R},\ \mathbf{R}): x(T+t)=x(t)\}$, $Y=\{x\mid x(t)\in C(\mathbf{R},\ \mathbf{R}): x(T+t)=x(t)\}$, $Z=\{x\mid x(t)\in C^1(\mathbf{R},\ \mathbf{R}): x(T+t)=x(t)\}$. 定义 $\|x\|_0=\max\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|$, $\|x\|_1=\max\limits_{t\in[0,T]}\{\|x\|_0,\ \|x'\|_0\}$, $\|x\|_2=\max\limits_{t\in[0,T]}\{\|x\|_0,\ \|x'\|_0,\ \|x''\|_0\}$. 则 X, Z, Y 分别在 $\|x\|_2$, $\|x\|_1$, $\|x\|_0$ 之下构成 Banach 空间.

定义算子 $L: X\to Y$, 有 $Lx=x''$, $\forall x\in X$. 又定义算子 $N: X\to Y$, 有 $Nx(t)=-g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),x'(t-\tau_2(t)))-c''(t)x(t-\tau(t))-[2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t)]x'(t-\tau(t))-c(t)(1-\tau'(t))^2x''(t-\tau(t))$, $\forall x\in X$. 则方程(1)转化为算子方程

$$Lx = Nx + p(t). \tag{4}$$

在本文中, 我们采用以下记号, 即

$$|x(t)|_0=\max_{t\in[0,T]}|x(t)|,\qquad |x(t)|_m=\min_{t\in[0,T]}|x(t)|,$$

$$a=|c''(t)|_0+|2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t)|_0+c(t)(1-\tau'(t))^2|_0,$$

$$h=\frac{T^2|c''(t)|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}+\frac{T|2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t)|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}+\frac{|c(t)(1-\tau'(t))^2|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}.$$

上式中, $f(t)$ 是 $t-\tau(t)$ 的反函数.

2 主要结果及其证明

定理 1 设以下 4 个条件均成立. (A_1) $a<1$, $h<1$. (A_2) $\exists\alpha>0$, $\forall x_i\geqslant\alpha$, $i=0,1$, $\forall(t,x_2)\in\mathbf{R}^2$, 有 $g(t,x_0,x_1,x_2)>0$ (或 <0), $\forall x_i\leqslant-\alpha$, $i=0,1$, $\forall(t,x_2)\in\mathbf{R}^2$, 有 $g(t,x_0,x_1,x_2)<0$ (或 >0). (A_3) $\exists\beta>0$, $\forall(t,x_0,x_1,x_2)\in\mathbf{R}^4$, 有 $g(t,x_0,x_1,x_2)\geqslant-\beta$ (或 $\leqslant\beta$). 则方程(1)至少存在一个周期解.

在证明此定理之前, 我们先证明以下一些引理.

引理 2[6] L 是指标为 0 的 Fredholm 算子, 并且满足 $l(L)\geqslant1$.

引理 3 在定理的条件下, 设 Ω 是 X 的任一有界子集, 则 $N:\overline{\Omega}\to Y$ 是 k–集压缩的, 且 $k<1$. 因篇幅限制, 证明从略.

引理 4 在定理 1 的条件下, 存在常数 $R_0>0$, 使得微分方程

$$Lx=\lambda Nx+\lambda p(t),\quad \lambda\in(0,1) \tag{5}$$

的任一解 $x(t)\in X$, 均满足 $\|x\|_2<R_0$.

证明 假设 $x(t)\in X$ 是式(5)的任一解, 则 $x''=\lambda Nx+\lambda p(t)$, 即

$$x''(t)+\lambda[x(t)+c(t)x(t-\tau(t))]''=\lambda p(t)-\lambda g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),x'(t-\tau_2(t)))+\lambda x''(t),$$

$$\begin{aligned}x''=&-\lambda g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),x'(t-\tau_2(t)))-\lambda c''(t)x(t-\tau(t))-\lambda\times\\&[2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t)]x'(t-\tau(t))-\lambda c(t)(1-\tau'(t))^2x''(t-\tau(t))+\lambda p(t).\end{aligned} \tag{6}$$

对上式从 0 到 T 积分, 则有

$$\int_0^T g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\ x'(t-\tau_2(t))\,\mathrm{d}t=0. \tag{7}$$

假设 $g^+=\max\{g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\ x'(t-\tau_2(t))),0\}$, $g^-=\max\{-g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\ x'(t-\tau_2(t))),0\}$, 则

$$g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\ x'(t-\tau_2(t)))=g^+-g^-, \tag{8}$$

$$|g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\ x'(t-\tau_2(t)))|=g^++g^-. \tag{9}$$

显然, g^+, g^- 均是非负的函数. 由条件(A_3)可知

$$|g^-|=g^-\leqslant\beta. \tag{10}$$

由式(7), (8)及式(10)可得 $\int_0^T g^+\,\mathrm{d}t=\int_0^T g^-\,\mathrm{d}t\leqslant\beta T$, 从而有

$$\int_0^T|g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\ x'(t-\tau_2(t)))|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T g^+\,\mathrm{d}t+\int_0^T g^-\,\mathrm{d}t\leqslant2\beta T. \tag{11}$$

由条件件(A_2)及式(7)可知, 必存在 $t_0\in[0,T]$, 使得 $|x(t_0)|<\alpha$, 从而有

$$|x(t)|\leqslant|x(t_0)|+\int_0^T|x'(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\alpha+\int_0^T|x'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{12}$$

又由于 $x(0)=x(T)$, 所以必 $\exists\, t_1\in[0,T]$, 使得 $|x'(t_1)|=0$. 因此有

$$|x'(t)|\leqslant|x'(t_1)|+\left|\int_{t_1}^{t}x''(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^T|x''(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{13}$$

并且, 我们又可由式(12), (13)得到

$$\int_0^T|x'(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant T\int_0^T|x''(t)|\,\mathrm{d}t,\qquad \int_0^T|x(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\alpha T+T^2\int_0^T|x''(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{14}$$

由式(6)可推出

$$\left.\begin{aligned}&|x''(t)|\leqslant|g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\ x'(t-\tau_2(t)))|+\\&|c''(t)||x(t-\tau(t))|+|2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t)||x'(t-\tau(t))|+\\&|c(t)(1-\tau'(t))^2||x''(t-\tau(t))|+|p(t)|\leqslant|g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\ x'(t-\tau_2(t)))|+\\&|c''(t)|_0|x(t-\tau(t))|+|2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t)|_0|x'(t-\tau(t))|+\\&|c(t)(1-\tau'(t))^2|_0|x''(t-\tau(t))|+|p(t)|_0.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

对式(15)从 0 到 T 积分, 再由式(11)及(14)可得

$$\begin{aligned}&\int_0^T|x''(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T|p(t)|\,\mathrm{d}t+\int_0^T|g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\ x'(t-\tau_2(t)))|\,\mathrm{d}t+\\&|c''(t)|_0\int_0^T|x(t-\tau(t))|\,\mathrm{d}t+|2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t)|_0\times\int_0^T|x'(t-\tau(t))|\,\mathrm{d}t+\\&|c(t)(1-\tau'(t))^2|_0\cdot\int_0^T|x''(t-\tau(t))|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T|p(t)|\,\mathrm{d}t+\\&\int_0^T|g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\ x'(t-\tau_2(t)))|\,\mathrm{d}t+|c''(t)|_0\int_{-\tau(0)}^{T-\tau(T)}\left|\frac{x(t)}{1-\tau'(f(t))}\right|\mathrm{d}t+\\&|2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t)|_0\times\int_{-\tau(0)}^{T-\tau(T)}\left|\frac{x'(t)}{1-\tau'(f(t))}\right|\mathrm{d}t+\\&|c(t)(1-\tau'(t))^2|_0\cdot\int_{-\tau(0)}^{T-\tau(T)}\left|\frac{x''(t)}{1-\tau'(f(t))}\right|\mathrm{d}t\leqslant\\&\int_0^T|g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\ x'(t-\tau_2(t)))|\,\mathrm{d}t+\frac{|c''(t)|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}\int_0^T|x(t)|\,\mathrm{d}t+\\&\frac{|c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t))|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}\int_0^T|x'(t)|\,\mathrm{d}t+\\&\frac{|c(t)(1-\tau'(t))^2|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}\int_0^T|x''(t)|\,\mathrm{d}t+|p(t)|_0T\leqslant\\&2\beta T+\frac{|c''(t)|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}\alpha T+h\int_0^T|x''(t)|\,\mathrm{d}t+|p(t)|_0T.\end{aligned}$$

从而

$$\int_0^T|x''(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{2\beta T}{1-h}+\frac{|c''(t)|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}\frac{\alpha T}{1-h}+\frac{|p(t)|_0T}{1-h}. \tag{16}$$

再由式(12), (13)及(16)可得

$$|x(t)|\leqslant\alpha+\frac{2\beta T^2}{1-h}+\frac{|c''(t)|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}\frac{\alpha T^2}{1-h}+\frac{|p(t)|_0T^2}{1-h}:=R_1,$$

$$|x'(t)|\leqslant\frac{2\beta T}{1-h}+\frac{|c''(t)|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}\frac{\alpha T}{1-h}+\frac{|p(t)|_0T}{1-h}:=R_2.$$

即

$$\|x\|_0=\max_{t\in[0,T]}|x(t)|\leqslant R_1,\quad \|x'\|_0=\max_{t\in[0,T]}|x'(t)|\leqslant R_2. \tag{17}$$

显然, 正常数 R_1, R_2 与 $\lambda(\lambda\in(0,1))$ 无关. 记

$$d=\max\{|g(t,x,y,z)|:t\in[0,T],\ |x|\leqslant R_1,\ |y\leqslant R_1,\ |z|\leqslant R_2\},$$

则由式(15)及式(17)可得

$$\|x''\|_0\leqslant\frac{d+|c''(t)|_0R_4+|2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t))|_0R_5+|p(t)|_0}{1-|c(t)(1-\tau'(t))^2|_0}:=R_3. \tag{18}$$

显然, 正常数 R_3 与 $\lambda(\lambda\in(0,1))$ 无关. 记 $R_0=\max\{R_1+1,R_2+1,R_3+1,\alpha+1\}$, 正常数 R_0 与 $\lambda(\lambda\in(0,$

1))无关. 于是, 由式(17)及式(18)可得, 对于方程 $x''=\lambda Nx+\lambda p(t)(\lambda\in(0,1))$ 的任一解 $x(t)\in X$, 均满足 $\|x\|_2<R_0$.

定理 1 的证明. 由本节前部分的说明可知, 要证明方程(1)至少存在一个 T-周期解, 等价于证明算子方程(4)在 X 中至少存在一个解 x. 因此, 只需要证明算子方程(4)满足引理 1 的全部条件即可.

事实上, 令 $\Omega=\{x\in X:\|x\|_2<R_0\}$, 于是由定理的条件可知引理 3, 4 成立, 因此, $N:\overline{\Omega}\to Y$ 是 k-集压缩的. 又由引理 2, 4 可知引理 1 的条件(1)成立.

现在, 在 $Y\times X$ 上定义一个双线性泛函 $[\cdot,\cdot]:[y,x]=\int_0^T y(t)x(t)\mathrm{d}t$, 并且定义投影算子 $Q:Y\to\operatorname{coker}L$: $Q=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\mathrm{d}t$, $\forall y\in Y$. 对于 $\forall x\in\partial\Omega\cap\ker L$, 有 $x=R_0$ 或 $x=-R_0$. 因此, 由条件(A_2)可得

$$[QNx+Qp,x][QN(-x)+Qp,x]=R_0^2\int_0^T(QNx+Qp)\mathrm{d}t\cdot\int_0^T(QN(-x)+Qp)\mathrm{d}t=$$

$$R_0^2\int_0^T g(t,R_0,R_0,0)\mathrm{d}t\cdot\int_0^T g(t,-R_0,-R_0,0)\mathrm{d}t<0.$$

即引理 1 中的条件(2)满足, 所以引理 1 中的所有条件都满足. 从而方程(4)在 X 中至少存在一个解, 所以方程(1)至少存在一个周期解.

3 结束语

对于具有变系数及多个可变时滞的二阶中立型泛函微分方程的周期解存在性问题, 我们还有一些新结果, 但因篇幅限制, 将另文发表.

参考文献:

[1] 王根强, 燕居让. 二阶非线性中立型泛函微分方程周期解的存在性[J]. 数学学报, 2004, (3): 379-384.

[2] 张 莉, 王全义. 一类二阶中立型泛函微分方程周期解的存在性[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2006, 27(2): 126-129.

[3] GAINS R E, MAWHIN J L. Coincidence degree and nonlinear differential equation[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977: 1-100.

[4] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2002: 193-194.

[5] PETRYSHYN W V, YU Z S. Existence theorems for higher order nonlinear periodic boundary value problems[J]. Nonlinear Anal, 1982, 6(9): 943-969.

[6] LIU Zhong-dong, MAO Yi-ping. Existence theorem for periodic solutions of higher order nonlinear differential equations[J]. J Math Anal Appl, 1997, 216: 481-490.

Periodic Solutions for the Second Order Neutral Functional Differential Equation with Deviating Arguments

ZHANG Li, WANG Quan-yi

(School of Mathematics Science, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, the existence of periodic solutions for a class of second order functional differential equations with deviating arguments is investigated by using some analytical techniques and the method of the abstract continuation theory. One sufficient condition for the existence of periodic solutions to the considered equations is obtained.

Keywords: neutral functional differential equation; periodic solution; k-set contraction operator; deviating argument

(责任编辑: 黄仲一)