

文章编号: 1000-5013( 2007) 04-0379-03

# 各向异性磁介质中圆电流环的磁矢势

吴敏敏, 王建成, 吴春曙

( 华侨大学 信息科学与工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 提出一种求解各向异性磁介质中电流磁场的新方法, 通过求解各向异性磁介质中圆电流环的磁矢势  $A$  分布, 求出其磁感应强度  $B$  分布. 结果表明, 各向同性磁介质中圆电流环在远场点的磁矢势公式, 与已知的结果一致; 磁矩  $m$  在各向同性介质中的  $P$  点产生的磁感应强度, 其结果也是预料之中.

关键词: 各向异性; 磁介质; 圆电流; 磁矢势; 磁感应强度

中图分类号: TM 153

文献标识码: A

文[ 1-5] 已从各向异性磁介质的毕奥-萨伐尔定律的笛卡儿坐标或极坐标形式出发, 分别计算出多种电流分布的磁场. 本文尝试通过求解各向异性磁介质中圆电流环的磁矢势分布, 求出其磁场感应强度分布, 为求解各向异性磁场介质中的电流磁场提供了一个新的方法.

## 1 各向异性磁介质中的矢势 $A$ <sup>[6]</sup>

在线性各向异性磁介质的磁导率的 3 个主轴与直角坐标 3 个轴一致情况下, 磁矢势  $A$  的积分式为

$$A(r) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{J_{\mu}(r') d\Omega}{R_{\mu}}. \tag{1}$$

式(1)中,  $J_{\mu}(r') = a_1 j_1(r') e_1 + a_2 j_2(r') e_2 + a_3 j_3(r') e_3$ ,  $a_1 = \sqrt{\frac{\mu_{22} \mu_{33}}{\mu_{11}}}$ ,  $a_2 = \sqrt{\frac{\mu_{11} \mu_{33}}{\mu_{22}}}$ ,  $a_3 = \sqrt{\frac{\mu_{11} \mu_{22}}{\mu_{33}}}$ ,  $R_{\mu} = (\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}})^{1/2}$ . 其中,  $j_1, j_2, j_3$  分别为电流密度的 3 个分量,  $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}$  分别为 3 个主轴方向的磁导率.  $R = r - r'$  为源点指向场点的矢径,  $R_1, R_2, R_3$  分别为该矢径的 3 个分量,  $e_1, e_2, e_3$  分别为直角坐标 3 个轴的单位矢量.

## 2 圆电流环的磁矢势 $A$ 积分表示式

在单轴晶体, 即  $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{12}$  情况下, 对于分布于  $XOY$  平面的圆环电流, 由于对称性, 在  $Z$  为常数的平面内, 以  $Z$  轴为心的圆周上任一点  $A$  的大小都相同, 因此  $A$  与方位角  $\varphi$  无关, 如图 1 所示. 为了方便, 求  $\varphi = 0$  的  $P(\gamma, \theta, 0)$  点的磁矢势  $A$ , 即可代表  $P(\gamma, \theta, \varphi)$  各点的  $A$ . 圆电流环分布于  $XOZ$  平面, 则式(1)可转化为

$$A(r) = \frac{\sqrt{\mu_{33}}}{4\pi} \int \frac{Idl'}{R_{\mu}}. \tag{2}$$

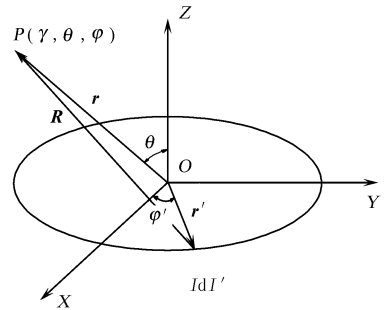


图 1 圆电流环

Fig. 1 Current-carrying circular circuit

由图 1 可知, 电流元  $Idl'$  的线元  $dl' = -r' d\phi \sin \phi e_1 + r' d\phi \cos \phi e_2$ . 因有  $\varphi = 0, \theta = \pi/2$ , 则由笛卡儿坐标与球坐标的变换关系可得  $r_1 = r \sin \theta, r'_1 = r' \cos \phi, r_2 = 0, r'_2 = r' \sin \phi, r_3 = r \cos \theta, r'_3 = 0$ . 故可得矢径  $R = r - r'$  的各分量  $R_1 = r_1 - r'_1 = r \sin \theta - r' \cos \phi, R_2 = r_2 - r'_2 = -r' \sin \phi, R_3 = r_3 - r'_3 = r \cos \theta = z$ .

收稿日期: 2006-07-26

作者简介: 吴敏敏(1978), 女, 硕士研究生, 现为莆田学院(福建 莆田 351100)讲师, 主要从事各向异性电磁的研究;

通信作者: 王建成(1943), 男, 教授, E-mail: wangjc@hqu.edu.cn.

把上述  $R$  分量值代入式(2), 可得

$$A(r) = \frac{\sqrt{\mu_{33}}}{4\pi} Ir' \int \frac{(-\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2) d\phi}{(\frac{r^2 \sin^2 \theta - 2rr' \sin \theta \cos \phi}{\mu_{12}} + \frac{r'^2}{\mu_{33}} + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{\mu_{33}})^{1/2}}. \tag{3}$$

因有

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi}{(\frac{r^2 \sin^2 \theta - 2rr' \sin \theta \cos \phi}{\mu_{12}} + \frac{r'^2}{\mu_{33}} + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{\mu_{33}})^{1/2}} d\phi = \frac{\mu_{12}}{rr' \sin \theta} (\frac{r^2 \sin^2 \theta + r'^2}{\mu_{12}} + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{\mu_{33}} - \frac{2rr' \sin \theta \cos \phi}{\mu_{12}})^{1/2} \Big|_0^{2\pi} = 0. \tag{4}$$

于是, 式(3)化为

$$A(r) = \frac{\sqrt{\mu_{33}} Ir'}{4\pi} \int \frac{\cos \phi d\phi}{(\frac{r^2 \sin^2 \theta + r'^2}{\mu_{12}} + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{\mu_{33}} - \frac{2rr' \sin \theta \cos \phi}{\mu_{12}})^{1/2}} \cdot \mathbf{e}_2. \tag{5}$$

由基矢变换关系可知, 在球坐标系中,  $P$  点的  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}^\varphi$ , 即  $\mathbf{e}_2 = \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_\theta + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}^\varphi$ . 故式(5)可写为

$$A(r) = \frac{\sqrt{\mu_{33}} Ir'}{4\pi} \int \frac{\cos \varphi d\phi}{(b - c \cos \phi)^{1/2}} \cdot \mathbf{e}^\varphi. \tag{6}$$

式中,  $b = \frac{r^2 \sin^2 \theta + r'^2}{\mu_{12}} + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{\mu_{33}}$ ,  $c = \frac{2rr' \sin \theta}{\mu_{12}}$ . 式(6)便是圆电流环在  $P$  点产生的磁矢势  $A$  的积分表达式. 在一般情况下, 式中的积分是椭圆积分.

3 远场点的磁矢势

在  $r \gg r'$  的远场点情况下, 式(6)中被积函数里的  $r'^2$  可以略去, 即  $b = r^2 (\frac{\sin^2 \theta}{\mu_{12}} + \frac{\cos^2 \theta}{\mu_{33}}) = r^2 D$ ,  $D = \frac{\sin^2 \theta}{\mu_{12}} + \frac{\cos^2 \theta}{\mu_{33}}$ . 据展开式  $(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \dots, x^2 < 1$ , 可得

$$(b - c \cos \phi)^{-1/2} = \frac{1}{r \sqrt{D}} (1 - \frac{c}{D' r^2} \cos \phi)^{-1/2} = \frac{1}{r \sqrt{D}} (1 + \frac{c}{2D' r^2} \cos \phi). \tag{7}$$

把式(7)代入式(6), 并根据  $\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0$ . 则 式(6)可化为

$$A(r) = \frac{\sqrt{\mu_{33}} Ir'}{4\pi} \frac{c}{2r^2 b^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \mathbf{e}^\varphi = \frac{\sqrt{\mu_{33}} Ir'^2 \sin \theta}{4\mu_{12} r^2 (\frac{\sin^2 \theta}{\mu_{12}} + \frac{\cos^2 \theta}{\mu_{33}})^{3/2}} \cdot \mathbf{e}^\varphi. \tag{8}$$

式(8)是所求的远场点的磁矢势. 当介质为各向同性时, 因有  $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$ ,  $D' = 1/\mu$ , 则式(8)化为

$$A(r) = \frac{\mu r'^2 \sin \theta}{4r^2} \cdot \mathbf{e}^\varphi = \frac{\mu \mathbf{m} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}. \tag{9}$$

其中, 圆电流环的磁矩  $\mathbf{m} = I \pi r'^2 \mathbf{e}_3$ . 式(9)就是各向同性磁介质中圆电流环在远场点的磁矢势公式, 与已知的结果一致<sup>[7]</sup>.

4 远场点的磁感应强度

在球坐标中有

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} [\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi - \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi})] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} [\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi)] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} [\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}] \mathbf{e}^\varphi.$$

把式(8)代入上式, 对远场点的磁矢势求旋度, 仍可得到远场点的磁感应强度为

$$\mathbf{B}(r) = \nabla \times \mathbf{A}(r) = \frac{\sqrt{\mu_{33}} Ir'}{4\mu_{12}} \nabla \times \{ \sin \theta [r^2 (\frac{\sin^2 \theta}{\mu_{12}} + \frac{\cos^2 \theta}{\mu_{33}})^{3/2}] \mathbf{e}^\varphi \}. \tag{10}$$

由式(10)可得

$$\nabla \times \{ \sin \theta / [r^2 (\frac{\sin^2 \theta}{\mu_{12}} + \frac{\cos^2 \theta}{\mu_{33}})^{3/2}] \mathbf{e}_\varphi \} = \frac{\cos \theta}{r^3 D^{3/2}} [2 - \frac{3 \sin^2 \theta}{D} (\frac{1}{\mu_{12}} - \frac{1}{\mu_{33}})] \mathbf{e}_r + [\frac{\sin \theta}{r^3 D^{3/2}}] \mathbf{e}_\theta.$$

代入式(10), 可得远场点的磁感应强度为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{\mu_{33}} I r'^2}{4 \mu_{12} r^3 D^{3/2}} \{ \cos \theta [2 - \frac{3 \sin^2 \theta}{D} (\frac{1}{\mu_{12}} - \frac{1}{\mu_{33}})] \mathbf{e}_r + \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\theta \}. \quad (11)$$

式(11)体现出介质各向异性对磁场的影响. 当介质为各向同性时, 因有  $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$ ,  $D = 1/\mu$ , 则式(11)化为

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu r'^2}{4 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) = \frac{\mu \mathbf{m}}{4 \pi r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) = \\ &= \frac{\mu}{4 \pi r^3} [3 m \cos \theta \mathbf{e}_r - (m \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta)]. \end{aligned}$$

由笛卡尔坐标与球坐标基矢变换关系  $\mathbf{e}_3 = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta$  上式可转化为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4 \pi r^3} [3(m \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e}_r - \mathbf{m}] = \frac{\mu (3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - r^2 \mathbf{m})}{4 \pi r^5}. \quad (12)$$

式(12)为用磁矩  $\mathbf{m} = I \pi r'^2 \mathbf{e}_3$  的磁偶极子代替圆电流环,  $\mathbf{m}$  在各向同性介质中的  $P$  点产生的磁感应强度, 其结果也是预料之中的.

## 5 结束语

本文通过求解各向异性磁场介质中圆电流环的磁矢量势分布, 求出其磁感强度. 结果表明, 各向同归磁介质中圆电流环在远场点的磁矢量势公式, 与已知结果一致.

### 参考文献:

- [1] 陈义成. 电磁学[M]. 北京: 科学出版社, 2002: 158-160.
- [2] 王建成, 陈燊年. 磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律及其应用[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 1989, 10(2): 125-132.
- [3] 王建成, 陈燊年. 各向异性磁介质毕奥-萨伐尔定律极坐标形成[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 1998, 17(4): 354-357.
- [4] 王建成. 各向异性磁介质中载流圆锥曲线焦点的磁场[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 1998, 19(3): 314-318.
- [5] 王建成, 李强, 苏武浔. 各向异性磁介质中载流线圈的磁场[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 1999, 20(4): 415-418.
- [6] 陈燊年, 陈思明, 王建成. 从麦克斯韦方程组建立的新电路理论[M]. 北京: 科学出版社, 1999: 264-273.
- [7] 陈秉乾, 舒幼生, 胡望雨. 电磁学专题研究[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 628-629.

## The Magnetic Vector Potential of a Current-Carrying Circular Circuit in Anisotropic Magnetic Medium

WU Min-min, WANG Jian-cheng, WU Chun-shu

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** In this paper, a new method to solve the magnetic field produced by current in anisotropic magnetic medium is presented. The magnetic induction intensity distribution  $\mathbf{B}$  is obtained by solving its magnetic vector potential  $\mathbf{A}$  distribution of current-carrying circular circuit in anisotropic medium. Results indicated that the magnetic vector formulation of current-carrying circular circuit in anisotropic medium at distant field is consistent with the known result. The result of magnetic induction intensity generated by the magnetism moment  $\mathbf{m}$  at  $P$  in anisotropic medium is also anticipated.

**Keywords:** anisotropic; magnetic medium; current-carrying circular circuit; magnetic vector potential; magnetic induction intensity

(责任编辑: 黄仲一)