文章编号: 1000-5013(2007)03-0335-02

关于"Beurling-Ahlfors 扩张的推广"一文的一点注

林珍连

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 郑学良在"Beurling-Ahlfors 扩张的推广"一文中指出, 实轴 **R** 上保持∞点不动的严格单调增加连续, 也就是放弃 M-条件, 其 Beurling-Ahlfors 扩张仍然具有局部拟共形性. 文中以反例指出, 这个论断是错误的.

关键词: M-条件; 拟共形映照; Beurling-Ahlfors 扩张; 复特征; 局部伸缩商

中图分类号: O 174.55 文献标识码: A

一个实值函数 $h(x)$ 被称为 M-拟对称函数的, 如果它是实轴 **R** 上连续递增函数, 并且满足所谓的 M-条件: $M^{-1}\leqslant\dfrac{h(x+t)+h(x)}{h(x)-h(x-t)}\leqslant M$, 对一切的 $x\in\mathbf{R}$, $t>0$ 成立. 设 f 是区域 D 到 G 的 C^1 类同胚映射, 且在 D 处满足2个条件: (1) $|\partial_{\bar z}f(z)|<|\partial_z f(z)|$; (2) $D_f(z)\leqslant K$, K 常数, 则称 f 为 D 内的一个 K-拟共形映照. 我们称 $u_f(z)=\dfrac{f_{\bar z}}{f_z}$ 为 f 的复特征, $D_f(z)=\dfrac{1+|u_f(z)|}{1-|u_f(z)|}$ 为 f 的局部伸缩商. 显然, 它是关于 z 的连续函数. 条件(2)的意义要求变换的局部伸缩商有一个公共的上界. 换句话说, 如果有某点 z 使得 $D_f(z)=\infty$, 那么 f 就不是拟共形的了. 在拟共形延拓的研究过程中, Beurling[1] 构造性地给出了上半平面到自身的 Beurling-Ahlfors 扩张函数(简称 B-A 扩张), $F(z)=U(x,y)+iV(x,y)$, 其中

$$U(x,y)=\frac{1}{2y}\int_{x-y}^{x+y}h(t)\mathrm{d}t,\qquad V(x,y)=\frac{r}{2y}\Big[\int_{x}^{x+y}h(t)\mathrm{d}t-\int_{x-y}^{x}h(t)\mathrm{d}t\Big].$$

作为定性研究, 取 $r=1$ 就足够了. Ahlfors[1] 已经证明, 只要 $h(x)$ 是 **R** 上单调增加连续函数, 那么 $f(z)$ 就是上半平面到自身的同胚. 关于 M-拟对称函数与 B-A 扩张有

定理 A[1] 每一个满足 M-拟对称的函数都可延拓为一个 K-拟共形映照. 其中 K 仅与 M 有关.

定理 B[1] B-A 拟共形扩张的边界值 $h(x)$ 是某一 M-拟对称函数.

郑学良[2] 将定理 A 中的 M-拟对称放弃, 建立似于定理 A 的结果. 即

定理 C 设 $h(x)$ 为 **R** 上连续的严格单调增加函数, 保持∞点不动, 则其 Beurling-Ahlfors 扩张仍为局部拟共形的. 但我们认为, 定理 C 是错误的, 并给出了一个反例.

1 反例

设 $h(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ x+x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 显然, $h(x)$ 是 **R** 到 **R** 上一个单调增加连续函数, 但 $h(x)$ 却不是 **R** 上的 M-拟对称函数. 事实上, $h(x)$ 在 $x=0$ 就不满足 M-条件. 因为对 $\forall t>0$, 有 $\dfrac{h(t)-h(0)}{h(0)-h(-t)}=\dfrac{t+t^2}{t}=1+t$, 这与 t 有关. 下面通过计算直接给出 $h(x)$ 的 B-A 扩张函数.

根据 $h(x)$ 和 B-A 扩张的表达式的特点, $h(x)$ 的 B-A 扩张分成以下4段. (1) 当 $x\leqslant 0$, 且 $x+y\leqslant 0$, $x-y\leqslant 0$ 时, 有 $U(x,y)=\dfrac{1}{2y}\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}t\,\mathrm{d}t=x$, $V(x,y)=\dfrac{1}{2y}\Big[\displaystyle\int_{x}^{x+y}t\,\mathrm{d}t-\int_{x-y}^{x}t\,\mathrm{d}t\Big]=\dfrac{y}{2}$. (2) 当 $x\leqslant 0$, 且 $x+$

收稿日期: 2006-11-02
作者简介: 林珍连(1970-), 女, 讲师, 主要从事函数论的研究. E-mail: zhenlian@hqu.edu.cn.
基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(S0650019)

$y \geqslant 0, x - y \leqslant 0$ 时, 有 $U(x,y) = \frac{1}{2y}\int_{x-y}^{x+y} h(t)\mathrm{d}t = = x + \frac{(x+y)^3}{6y}, V(x,y) = \frac{1}{2y}[\int_{x}^{x+y} h(t)\mathrm{d}t - \int_{x-y}^{x} h(t)\mathrm{d}t] = \frac{y}{2} + \frac{(x+y)^3}{6y}$. (3) 当 $x \geqslant 0, x+y \geqslant 0, x-y \leqslant 0$ 时, $U(x,y) = x + \frac{(x+y)^3}{6y}, V(x,y) = \frac{y}{2} + \frac{(x+y)^3 - 2x^3}{6y}$. (4) 当 $x \geqslant 0, x-y \geqslant 0, x+y \geqslant 0$ 时, 有 $U(x,y) = x + x^2 + \frac{y^2}{3}, V(x,y) = xy + \frac{y}{2}$.

上面 4 种情形将上半平面分成 4 块区域, 分别记为 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$. 考虑其局部伸缩商情况, 在 Ω_1 上, 有 $U_x = 1, U_y = 0, V_x = 0, V_y = \frac{1}{2}, D + \frac{1}{D} = \frac{U_x^2 + U_y^2 + V_x^2 + V_y^2}{|U_xV_y - U_yV_x|} = \frac{5}{2}$, 故 $f(z)$ 在区域 Ω_1 上是拟共形的. 在区域 Ω_2 上的情形, 知道要使得 $D_f(z) = \infty$. 由 $D_f(z)$ 的定义, 只要 $|u_f(z)| = 1$, 即 $|f_{\bar z}|^2 = |f_z|^2$(其中 $f_z = f_x - if_y, 2f_{\bar z} = f_x + if_y$). 由 $U_x = V_x + 1, V_y = \frac{1}{2} + U_y, V_x = \frac{(x+y)^2}{2y}, U_y = \frac{(x+y)^2(2y-x)}{6y^2}$, 经过计算可得 $6y^2 + (x+y)^2(7x - 2x) = 0$, 解得 $x = y = 0$. 由于 $D_f(z)$ 是 z 连续函数, 所以在 Ω_2 上存在以原点为心的一个小邻域, 使得 $D_f(z)$ 在此邻域内可以任意大. 这与拟共形的定义相矛盾, 也就不会是上半平面到上半平面的拟共形映射. 同样, 可以考察区域 Ω_3, Ω_4 的情形, 可知 $f(z)$ 在 Ω_3 上情形与 Ω_2 的类似, Ω_4 上与 Ω_1 上的类似. 总之, $f(z)$ 不会是上半平面到上半平面的拟共形映射.

2 结束语

事实上, 由定理 A 及定理 B 可知, M-条件是 B-A 扩张为拟共形扩张的充要条件. 可以证明 M-条件等价于 $h(x)$ 关于自变量和因变量在形如 $ax + b, a > 0$ 的线性映射下是封闭的[2]. 在定理 C 的证明过程中, 把对 $f(z)$ 的伸缩商的估计归结为在 i 点处的伸缩商的估计. 文[2]应用了 $h(x)$ 关于自变量和因变量在线性映照下不变的性质, 所以也就没有放弃 M-条件.

参考文献:

[1] Beurling A, Ahlfors L. The boundary corrending under quasiconformal mappings[J]. Acta Math, 1956, 96: 125-142.

[2] 郑学良. Beurling-Ahlfors 扩张的推广[J]. 浙江师范大学学报: 自然科学版, 1995, 18(3): 16-17.

A Note on the Paper of the Generalization of Beurling-Ahlfors′ Extension

LIN Zhen-lian

(School of Mathematics Science, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: ZHENG Xue-liang′s paper "The Generlization of Beurling-Ahlfors′ Extension" says that the Beurling-Ahlfors′ extension still possesses local quasiconformality without M-condition. In this paper we shall give a counter example to illustrate the result is not true.

Keywords: M-condition; quasiconformal mapping; Beurling-Ahlfors′ extension; complex dilatation; local dilatation quotient

(责任编辑: 黄仲一)