第 28 卷　第 3 期　　华 侨 大 学 学 报 (自 然 科 学 版)　　Vol. 28　No. 3
2007 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 2007

文章编号: 1000-5013(2007) 03-0330-05

2* 2 上三角算子矩阵的左(右) Browder 谱

陈晓玲[1], 钟怀杰[2]

(1. 集美大学 理学院, 福建 厦门 361021; 2. 福建师范大学 数学与计算机科学学院, 福建 福州 350007)

摘要: 设 X, Y 是复的 Banach 空间, 在一个上三角算子矩阵 $M_c=\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\in B(X\oplus Y)$ 中, $A\in B(X)$, $B\in B(Y)$ 是事先给定的, 对于任意的 $C\in B(Y, X)$, M_c 的左(右) Browder 谱: $\sigma_{lb}(M_c)=\{\lambda\in C: M_c)-\lambda\notin B_+(X\oplus Y)\}$, $B_+(X\oplus Y)=\{T\in\Phi_+(X\oplus Y): \mathrm{asc}(T)<\infty\}$, $(\sigma_{rb}(M_c)=\{\lambda\in C: M_c)-\lambda\notin B_-(X\oplus Y)\}$, $B_-(X\oplus Y)=\{T\in\Phi_-(X\oplus Y): \mathrm{des}(T)<\infty\})$. 文中得到 $\sigma_{lb}(M_c)(\sigma_{rb}(M_c))$ 与 $\sigma_{lb}(A)\cup\sigma_{lb}(B)(\sigma_{rb}(A)\cup\sigma_{rb}(B))$ 之间存在有趣的填洞现象, 即 $\sigma_*(A)\cup\sigma_*(B)=\sigma_*(M_c)\cup W$. 其中, W 是 $\sigma_*(M_c)$ 的某些洞的并 $\sigma_*\in\{\sigma_{lb},\sigma_{rb}\}$, 并找出洞 W 的具体位置.

关键词: Banach 空间; 算子矩阵; 左 Browder 谱; 右 Browder 谱
中图分类号: O 177.2　　文献标识码: A

设 X, Y 表示复的无限维 Banach 空间, $B(X, Y)$ 表示由 X 到 Y 的有界线性算子全体, 当 $X=Y$ 时, 则 $B(X, Y)$ 简记为 $B(X)$. 在一个上三角算子矩阵 $M_c=\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\in B(X\oplus Y)$ 中, A, B 是事先给定. 对于任意给定的一个 $C\in B(Y, X)$ 所确定的谱 $\sigma(M_c)$ 与原分块中 $\sigma(A)$, $\sigma(B)$ 之间的关系, 文[1] 给出: 对于一般的 $C\in B(Y, X)$, $\sigma(M_c)$ 与 $\sigma(A)\cup\sigma(B)$ 之间事实上就只差 $\sigma(M_c)$ 的某些"洞". 换句话说, $\sigma(M_c)$ 可通过填满它的某些"洞"而得到 $\sigma(A)\cup\sigma(B)$. 所谓"洞"指的是紧集的、余集的有界连通分支. 近几年, 对算子矩阵特殊谱填洞情况的研究不少, 但结果大多在 Hilbert 空间中得到[2-5]. 本文主要在 Banach 空间中, 讨论上三角算子矩阵的左(右) Browder 谱的填洞情况.

1　预备知识

若 $T\in B(X, Y)$, $N(T)$ 表示 T 的零空间, $R(T)$ 表示 T 的值域, $N(T)$ 的维数记为 $\alpha(T)$. 当 $R(T)$ 是闭时, $\beta(T)$ 表示 $Y/R(T)$ 的维数, T 的升指数 $\mathrm{asc}(T)$ 是满足 $N(T^k)=N(T^{k+1})$ 的最小非负整数 k, 如果这样的 k 不存在, 则记 $\mathrm{asc}(T)=\infty$; T 的降指数 $\mathrm{des}(T)$ 是满足 $R(T^k)=R(T^{k+1})$ 的最小非负整数 k, 如果这样的 k 不存在, 则记 $\mathrm{des}(T)=\infty$.

Banach 空间 X 上 Fredholm 算子的全体 $\Phi(X)=\{T\in B(X): R(T)$ 闭, $\alpha(T)<\infty$ 且 $\beta(T)<\infty\}$; 上半 Fredholm 算子的全体 $\Phi_+(X)=\{T\in B(X): R(T)$ 闭且 $\alpha(T)<\infty\}$, 而下半 Fredholm 算子的全体 $\Phi_-(X)=\{T\in B(X): \beta(T)<\infty\}$; 左半 Fredholm 算子的全体 $\Phi_l(X)=\{T\in B(X): R(T)$ 闭且在 X 中可补, $\alpha(T)<\infty$, 右半 Fredholm 算子的全体 $\Phi_r(X)=\{T\in B(X): N(T)$ 在 X 中可补, $\beta(T)<\infty\}$; 令 $\Phi_\pm(X)=\Phi_+(X)\cup\Phi_-(X)$, $\Phi_0(X)=\{T\in\Phi(X): \mathrm{ind}(T)=0\}$, 当 $T\in\Phi_\pm(X)$ 时, $\mathrm{ind}(T)=\alpha(T)-\beta(T)$, 当 $T\in B(X)$ 时, T 的左 Browder 谱(亦称 Browder 本性近似点谱) 记为 $\sigma_{lb}(\cdot)$ 或 $\sigma_{ab}(\cdot)$.

$\sigma_{lb}(T)=\{\lambda\in C: T-\lambda\notin B_+(X)\}$, 其中 $B_+(X)=\{T\in\Phi_+(X): \mathrm{acs}(T)<\infty\}$. T 的右 Browder 谱(亦称 Browder 本性近似亏谱) 记 $\sigma_{rb}(\cdot)$ 或 $\sigma_{db}(\cdot)$: $\sigma_{rb}(T)=\{\lambda\in C: T-\lambda\notin B_-(X)\}$, 其中 $B_-(X)=\{T\in\Phi_-(X): \mathrm{des}(T)<\infty\}$. T 的 Browder 谱: $\sigma_b(T)=\{\lambda\in C: T-\lambda\notin B(X)\}$, 其中 $B(X)=$

收稿日期: 2006-12-26
作者简介: 陈晓玲(1980-) , 女, 助教, 硕士, 主要从事泛函分析方面的研究. E-mail: chenxiaoling@jmu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471025) ; 福建省自然科学基金资助项目(S0650009)

$\{T \in \Phi(X): \mathrm{acs}(T) = \mathrm{des}(T) < \infty\}$. $\sigma(T)$的其他各种谱成分有如下 6 种. (1) T 的点谱. $\sigma_p(T) = \{\lambda \in C: T-\lambda$不是单射$\}$. (2) T 的满谱. $\sigma_{su}(T) = \{\lambda \in C: T-\lambda$不是满射$\}$. (3) T 的孤立有限代数重特征值集. $\sigma_p^0(T) = \{\lambda \in C: T-\lambda$是$\sigma(T)$的孤立点且谱投影空间$R(E(\lambda: T)$是(非零)有限维$\}$. (4) T 的 Weyl 谱 $\sigma_w(T) = \{\lambda \in C: T-\lambda \notin \Phi_0(X)\}$. 其左 Weyl 谱 $\sigma_{lw}(T) = \{\lambda \in C: T-\lambda \notin \Phi_+^-(X)\}$, $\Phi_+^-(X) = \{T \in \Phi_+(X): \mathrm{ind}(T) \leqslant 0\}$; 而右 Weyl 谱 $\sigma_{rw}(T) = \{\lambda \in C: T-\lambda \notin \Phi_-^+(X)\}$, $\Phi_-^+(X) = \{T \in \Phi_-(X): \mathrm{ind}(T) \geqslant 0\}$. (5) T的本性谱$\sigma_e(T) = \{\lambda \in C: T-\lambda \notin \Phi(X)\}$; T的右本性谱$\sigma_{re}(T) = \{\lambda \in C: T-\lambda \notin \Phi_r(X)\}$. (6) T 的 Kato 谱 $\sigma_{k_1}(T) = \{\lambda \in C: T-\lambda \notin \Phi_\pm(X)\}$.

对于 C 的紧子集表示为 K, 而 iso K, ∂K 分别表示 K 的孤立点集和拓扑边界, $\eta(K)$表示 K 的多项式凸包. 即

$$\eta(K) = \{w: |p(w)| \leqslant \max\{|p(z)|: z \in K\}, \text{对于所有多项式 } p\}.$$

如果 K 是一个闭圆环, 则 $\eta(K)$为填上内部的空洞所得到的闭圆盘. 事实上, 如是 K 是任何一个紧集, 那么由最大模定理给出, $\eta(K)$由填上 K 中可能存在的任何"洞"得到[6].

2　左 Browder 谱的填洞情况[2]

设 H, K 是 Hilbert 空间, $A \in B(H)$, $B \in B(K)$, 对任意的 $C \in B(K, H)$有

$$\sigma_b(A) \cup \sigma_{lb}(B) = \sigma_b(\boldsymbol{M}_C) \cup W,$$

其中, $W \subseteq \sigma_{su}(A) \cap \sigma_b(B)$是 $\sigma_{lb}(\boldsymbol{M}_C)$的某些洞的并.

下面, 我们在 Banach 空间中考虑左 Browder 谱的填洞情况, 并把文[2]的结果进行推广.

引理 1　$A \in B(X)$, $B \in B(Y)$, 若 $\mathrm{acs}(A) < \infty$, $\mathrm{acs}(B) < \infty$, 则对任意的 $C \in B(Y, X)$, $\boldsymbol{M}_C$ 都有有限升指数.

本引理在 Hilbert 空间中的情况, 文[2]已给出, 经核实, 在 Banach 空间同样成立. 证明从略.

引理 2[7]　X 是线性赋范空间, $T \in B(X)$, 如果对某个k使得$N(T) \cap T^k(X)$是有限维的, 那么, $T(T^\infty(X)) = T^\infty(X)$ (其中 $T^\infty(X) = \bigcap_{n=1}^\infty R(T^n)$).

引理 3[8]　$T \in B(X)$, 那么, (a) 若对某个非负整数 p 有 $N(T) \cap R(T^p) = \{0\}$, 则 $\mathrm{acs}(T) \leqslant p$; (b) 若 $\mathrm{acs}(T) \leqslant p$, 则对任意正整数 k 有 $N(T^k) \cap R(T^p) = \{0\}$.

引理 4[9]　$T \in \Phi_+(X)$ (或 $\Phi_-(X)$), 如果存在 $\varepsilon > 0$, 使得任意的 λ满足 $0 < |\lambda| < \varepsilon$都有 $T-\lambda$下有界(或满射), 那么, T 有有限升指数(或降指数).

引理 5[9]　即半 Fredholm 算子的洞指标原理. 设 X 是 Banach 空间, $T \in \Phi_\pm(X)$, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使得当$0 < |\lambda| < \varepsilon$时, $(T-\lambda) \in \Phi_\pm(X)$且有: (1) $\alpha(T-\lambda)$取常数n, $n \leqslant \alpha(T)$; (2) $\beta(T-\lambda)$取常数m, $m \leqslant \beta(T)$; (3) $\mathrm{ind}(T-\lambda) = \mathrm{ind}(T)$.

引理 6[10]　设 X 是 Banach 空间, $T \in B(X)$, 那么(1) $\sigma(T)/\sigma_b(T) = \sigma_p^0(T)$是一个至多可数集. (2) $\sigma_b(T)/\sigma_w(T) = \sigma_w(T)$的某些洞的并, 这些洞有零指标.

引理 7　设 K_1, $K_2 \subset C$ 是紧子集, $K_1 \subset K_2$ 且$\partial K_2 \subset \partial K_1$, 则 $\eta(K_1) = \eta(K_2)$.

证　由多项式凸包的定义, 只须证: K_2 等于 K_1 填上后者的某些洞, 即 K_2 的洞$(\eta(K_2)/K_2)$是 K_1 的洞$(\eta(K_1)/K_1)$的某些支集的并. 设 Ω是$\eta(K_1)/K_1$ 的, 且与 $\eta(K_2)/K_2$ 相交不空的支集. 设 U 是$[\overline{\eta(K_2)/K_2}]$的余集, 由于$\partial K_2 \subset \partial K_1$, $\eta(K_1)/K_1$ 不含∂K_1 的点, 故 $\eta(K_1)/K_1$ 不含$\partial(\eta(K_2)/K_2 = \partial K_2$ 的点. 因此, Ω是两个不相交开集 $\Omega \cap (\eta(K_2)/K_2)$, $\Omega \cap U$ 的并. 又由 Ω是连通的, 则 $\Omega \cap U$ 是空集, 故 $\Omega \subset \eta(K_2)/K_2$, 即 $\eta(K_2)/K_2$ 是 $\eta(K_1)/K_1$ 的某些支集的并.

引理 8　若 $A \in B(X)$, $B \in B(Y)$, $C \in B(Y, X)$有 $\eta[\sigma_{lw}(\boldsymbol{M}_C)] = \eta[\sigma_w(B) \cup \sigma_{lw}(B)]$.

证　显然有

$$\sigma_{le}(A) \subseteq \sigma_{lw}(\boldsymbol{M}_C) \subseteq \sigma_{lw}(A) \cup \sigma_{lw}(B).$$

事实上, 若 $A \in \Phi_+^-(X)$, $B \in \Phi_+^-(Y)$, 则$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \Phi_+(X \oplus Y)$, 且 $\mathrm{ind}\, \boldsymbol{M}_C = \mathrm{ind}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \mathrm{ind}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \leqslant 0$, 故 $\boldsymbol{M}_C \in \Phi_+^-(X \oplus Y)$. 若 $\boldsymbol{M}_C \in \Phi_+^-(X \oplus Y)$, 则 $A \in \Phi_+(X)$. 对任意的 $T \in B(X)$, 有

$$\eta(\sigma_w(T)) = \eta(\sigma_{lw}(T)).$$

事实上, $\sigma_{lw}(T)\subseteq\sigma_w(T)$, 只须证$\partial\sigma_w(T)\subseteq\sigma_{lw}(T)$. 若$\lambda_0\in\partial\sigma_w(T)/\sigma_{lw}(T)$, 则$T-\lambda_0\in\Phi_+(X)$, 由引理5存在$\varepsilon>0$, 使得$T-\lambda\in\Phi_+(X)$且$\mathrm{ind}(T-\lambda)=\mathrm{ind}(T-\lambda_0)$, 当$0<|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$时. 另一方面, 又由于$\lambda_0\in\partial\sigma_w(T)$, 故存在$\lambda_1$满足$0<|\lambda_1-\lambda_0|<\varepsilon$且$T-\lambda_1\in\Phi_0(X)$, 从而$\mathrm{ind}(T-\lambda_0)=0$, 即$T-\lambda_0\in\Phi_0(X)$, 这与$\lambda_0\in\sigma_w(T)$矛盾, 故$\partial\sigma_w(T)\subseteq\sigma_{lw}(T)$, 因此, $\eta(\sigma_w(T))=\eta(\sigma_{lw}(T))$. 类似地, 可证对于任意的$A\in B(X)$, $B\in B(Y)$, $\eta(\sigma_w(A)\cup\sigma_w(B))=\eta(\sigma_{lw}(A)\cup\sigma_{lw}(B))$.

$$\eta(\sigma_{lw}(\boldsymbol{M}_C)) = \eta(\sigma_w(\boldsymbol{M}_C)) = \eta(\sigma_w(A)\cup\sigma_w(B)) = \eta(\sigma_{lw}(A)\cup\sigma_{lw}(B)),$$

其中, 第2个等号参见文[3].

定理9　$A\in B(X)$, $B\in B(Y)$, 对任意的$C\in B(Y,X)$有

$$\sigma_{lb}(A)\cup\sigma_{lb}(B) = \sigma_{lb}(\boldsymbol{M}_C)\cup W, \tag{1}$$

其中, $W\subseteq\sigma_{lb}(B)\setminus\sigma_{lb}(A)$是$\sigma_{lb}(\boldsymbol{M}_C)$的某些洞的并. 进而, 得到左半Browder谱半径$r_{lb}(\boldsymbol{M}_C)$是个常数, 且当$\sigma_b^0\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}=\emptyset$时, 对任意的$C\in B(Y,X)$有

$$r\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix} = r\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix} = r_{lb}\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix} = r_{lb}\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix}. \tag{2}$$

证　先证

$$\sigma_{lb}(A)\subseteq\sigma_{lb}(\boldsymbol{M}_C)\subseteq\sigma_{lb}(A)\cup\sigma_{lb}(B). \tag{3}$$

事实上, 若$A-\lambda_0\in B_+(X)$, $B-\lambda_0\in B_+(Y)$, 由引理1有$\boldsymbol{M}_C-\lambda_0$有有限升指数, 故$\boldsymbol{M}_C-\lambda_0\in B_+(X\oplus Y)$. 若$\boldsymbol{M}_C-\lambda_0\in B_+(X\oplus Y)$, 则$A-\lambda_0\in\Phi_+(X)$. 对任意的$n\in N$, 有

$$N[(A-\lambda_0)^n]\oplus\{0\}\subseteq N[(\boldsymbol{M}_C-\lambda_0)^n],$$

从而$A-\lambda_0$有有限升指数, $A-\lambda_0\in B_+(X)$, 式(3)得证. 对任意的$T\in B(X)$有

$$\eta[\sigma_{lb}(T)] = \eta[\sigma_{lw}(T)]. \tag{4}$$

事实上, $\sigma_{lw}(T)\subseteq\sigma_{lb}(T)$, 只须证$\partial\sigma_{lb}(T)\subseteq\sigma_{lw}(T)$. 若$\lambda_0\in\partial\sigma_{lb}(T)\setminus\sigma_{lw}(T)$, 则$T-\lambda_0\in\Phi_+(X)$. 由引理5存在$\varepsilon>0$使得$T-\lambda_0-\lambda\in\Phi_+(X)$, $\alpha(T-\lambda_0-\lambda)$, $\beta(T-\lambda_0-\lambda)$是常数, 当$0<|\lambda|<\varepsilon$时. 令$Y=\bigcap_{n=1}^{\infty}R(T-\lambda_0)^n$, 则$Y$是闭的, 由引理2知$(T-\lambda_0)Y=Y$, 不失一般性. 设$Y\neq\{0\}$, 令$T_1=(T-\lambda_0)|Y$, 则$T_1$是满射, 故$T_1\in\Phi(Y)$. 由引理5, $T_1-\lambda$是满射, 当$0<|\lambda|<\varepsilon$时, 即$(T_1-\lambda)Y=Y$, 从而有

$$Y=\bigcap_{n=1}^{\infty}R[(T_1-\lambda)^n]\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}R[(T_1-\lambda_0-\lambda)^n],$$

当$0<|\lambda|<\varepsilon$时. 又由$N(T-\lambda_0-\lambda)\subseteq Y$, $N(T-\lambda_0-\lambda)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}R[(T-\lambda_0-\lambda)^n]$, 且$\alpha(T-\lambda_0-\lambda)$是常数, 当$0<|\lambda|<\varepsilon$时. 另一方面, 又由于$\lambda_0\in\partial\sigma_{lb}(T)$, 故存在$\lambda_1$满足$0<|\lambda_1|<\varepsilon$, $T-\lambda_0-\lambda_1\in B_+(X)$. 由引理3有$N(T-\lambda_0-\lambda_1)=N(T-\lambda_0-\lambda_1)\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}R[(T-\lambda_0-\lambda_1)^n]=\{0\}$, 故$\alpha(T-\lambda_0-\lambda_1)=0$, 从而当$0<|\lambda|<\varepsilon$时, $\alpha(T-\lambda_0-\lambda)=0$. 又由于$T-\lambda_0-\lambda\in\Phi_+(X)$, 所以$T-\lambda_0-\lambda$下有界. 因为有$T-\lambda_0\in\Phi_+(X)$, 由引理4可知, $\mathrm{acs}(T-\lambda_0)<\infty$, 故$T-\lambda_0\in B_+(X)$. 这与$\lambda_0\in\sigma_{lb}(T)$相矛盾, 式(4)得证.

由引理8与式(4)有

$$\eta(\sigma_{lb}(\boldsymbol{M}_C)) = \eta(\sigma_{lw}(\boldsymbol{M}_C)) = \eta(\sigma_{lw}(A))\cup\sigma_w(B)) = \eta(\sigma_{lb}(A))\cup\sigma_{lb}(B)). \tag{5}$$

若$\lambda_0\in[\sigma_{lb}(A)\cup\sigma_{lb}(B)]\setminus\sigma_{lb}(\boldsymbol{M}_C)$, 由式(3)有$\lambda_0\in\sigma_{lb}(B)\setminus\sigma_{lb}(A)$, 故式(1)得证. 又由引理6有

$$\eta\left[\sigma\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}\right]\setminus\eta\left[\sigma_w\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}\right]\subseteq\sigma_b^0\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}, \tag{6}$$

式(2)由式(6), (4)和式(5)可得.

推论10　若$\sigma_{lb}(B)/\sigma_{lb}(A)$没有内点, 则对任意的$C\in B(Y,X)$

$$\sigma_{lb}(\boldsymbol{M}_C) = \sigma_{lb}(A)\cup\sigma_{lb}(B).$$

特别地, 当$A\in B(X)$或$B\in(Y)$是紧算子(或黎斯算子)时, 上式成立.

3　右Browder谱的填洞情况

右Browder谱是与左Browder谱相对偶的情况, 下面我们讨论右Browder谱的填洞情况.

引理 **11** $A\in B(X)$, $B\in B(Y)$, 如果 A, B 有有限降指数, 则对任意的 $C\in B(Y,X)$, $\boldsymbol{M}_c$ 有有限降指数.

证 设 $\mathrm{des}(A)=p$, $\mathrm{des}(B)=q$, 令 $n=\max\{p,q\}$, 对于任意的 $C\in B(Y,X)$, 容易证明 $R(M_c^{2n+1})=R(M_c^{2n})$.

引理 **12**[8] $T\in B(X)$, 那么, (a) 对某个 $q\geqslant 0$, $k\geqslant 1$, 若存在子空间 $M_k\subset N(T^q)$, $M_k\cap R(T^k)=\{0\}$, 且 $X=R(T^k)\oplus M_k$, 则 $\mathrm{des}(T)\leqslant q$. (b) 若 $\mathrm{des}(T)\leqslant q$, 则对每个 $k\geqslant 1$, 都有子空间 $M_k\subset N(T^q)$, 且 $X=R(T^k)\oplus M_k$.

引理 **13**[10] $T\in B(X)$, 那么有以下 7 点等价: (1) 对任意的 $m\in N$, $\mathrm{Ker}\,T\subseteq T^m(X)$; (2) 对任意的 $n\in N$, $\mathrm{Ker}\,T^n\subseteq T(X)$; (3) 对于任意的 $n,m\in N$, $\mathrm{Ker}\,T^n\subseteq T^m(X)$; (4) 对于任意的 $n,m\in N$, $\mathrm{Ker}\,T^n\subseteq T^m(\mathrm{Ker}\,T^{m+n})$; (5) $\mathrm{Ker}\,T\subseteq T^\infty(X)$; (6) $N^\infty(T)\subseteq T(X)$; (7) $N^\infty(T)\subseteq T^\infty(X)$. 其中, $N^\infty(T)=\bigcup_{n=1}^{\infty}N(T^n)$, $T^\infty(X)=\bigcap_{n=1}^{\infty}R(T^n)$.

引理 **14** 若 $A\in B(X)$, $B\in B(Y)$, $C\in B(Y,X)$ 有 $\eta[\sigma_{rw}(\boldsymbol{M}_c)]=\eta[\sigma_{rw}(A)\cup\sigma_{rw}(B)]$. 证明过程与引理 8 完全类似, 故从略.

定理 **15** $A\in B(X)$, $B\in B(Y)$, 对任意的 $C\in B(Y,X)$ 有

$$\sigma_{rb}(A)\cup\sigma_{rb}(B)=\sigma_{rb}(\boldsymbol{M}_c)\cup W, \tag{7}$$

其中, $W\subseteq\sigma_{rb}(A)\setminus\sigma_{rb}(B)$ 是 $\sigma_{rb}(\boldsymbol{M}_c)$ 的某些洞的并. 进而, 得到右半 Browder 谱半径 $r_{rb}(\boldsymbol{M}_c)$ 是个常数, 且当 $\sigma_p^{\circ}\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}=\emptyset$ 时, 对任意的 $C\in B(Y,X)$ 有

$$r\begin{bmatrix}A&C\\0&B\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}=r_{rb}\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}=r_{rb}\begin{bmatrix}A&C\\0&B\end{bmatrix}. \tag{8}$$

证 先证

$$\sigma_{rb}(B)\subseteq\sigma_{rb}(\boldsymbol{M}_c)\subseteq\sigma_{rb}(A)\cup\sigma_{rb}(B). \tag{9}$$

事实上, 若 $A-\lambda_0\in B_-(X)$, $B-\lambda_0\in B_-(Y)$. 由引理 11 有 $\boldsymbol{M}_c-\lambda_0$ 为有限降指数, 故 $\boldsymbol{M}_c-\lambda_0\in B_-(X\oplus Y)$. 若 $\boldsymbol{M}_c-\lambda_0\in B_-(X\oplus Y)$, 则 $B-\lambda_0\in\Phi_-(Y)$. 对任意的 $n\in N$, 有

$$R[(\boldsymbol{M}_c-\lambda_0)^n]\subseteq X\oplus R[(B-\lambda_0)^n],$$

从而 $B-\lambda_0$ 为有限降指数, $B-\lambda_0\in B_-(Y)$, 式(9) 得证. 对任意的 $T\in B(X)$ 有

$$\eta[\sigma_{rb}(T)]=\eta[\sigma_{rw}(T)]. \tag{10}$$

事实上, $\sigma_{rw}(T)\subseteq\sigma_{rb}(T)$, 只须证 $\partial\sigma_{rb}(T)\subseteq\sigma_{rw}(T)$. 若 $\lambda_0\in\partial\sigma_{rb}(T)\setminus\sigma_{rw}(T)$, 则 $T-\lambda_0\in\Phi_-^{+}(X)$. 由引理 5 存在 $\varepsilon>0$, 使得 $T-\lambda_0-\lambda\in\Phi_-(X)$, $\alpha(T-\lambda_0-\lambda)$, $\beta(T-\lambda_0-\lambda)$ 是常数. 当 $0<|\lambda|<\varepsilon$ 时. 令 $Y=\bigcap_{n=1}^{\infty}R(T-\lambda_0)^n$ 是闭的, 由引理 2 知 $(T-\lambda_0)Y=Y$, 不失一般性. 设 $Y\neq\{0\}$, 令 $T_1=(T-\lambda_0)|Y$, 则 T_1 是满射, 故 $T_1\in\Phi_-(Y)$. 由引理 5 得 $T_1-\lambda$ 是满射, 当 $0<|\lambda|<\varepsilon$ 时, 即 $(T_1-\lambda)Y=Y$, 从而 $Y=\bigcap_{n=1}^{\infty}R[(T-\lambda)^n]\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}R[(T-\lambda_0-\lambda)^n]$. 当 $0<|\lambda|<\varepsilon$ 时, 又由 $N(T-\lambda_0-\lambda)\subseteq Y$, 则事实上, 若 $(T-\lambda_0-\lambda)x=0$ 有 $(T-\lambda_0)x=\lambda x$, 即

$$x=\frac{1}{\lambda}(T-\lambda_0)x=\frac{1}{\lambda^n}(T-\lambda_0)^n x=(T-\lambda_0)^n\left(\frac{x}{\lambda^n}\right).$$

对任意的 n, 因此有 $N(T-\lambda_0-\lambda)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}R[(T-\lambda_0-\lambda)^n]$, 由引理 13 可知, $N[(T-\lambda_0-\lambda)^n]\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}R[(T-\lambda_0-\lambda)^n]$, 对任于意的 m 成立. 另一方面, 又由于 $\lambda_0\in\partial\sigma_{rb}(T)$, 故存在 λ_1 满足 $0<|\lambda_1|<\varepsilon$, $T-\lambda_0-\lambda_1\in B_-(X)$, 从而 $\mathrm{des}(T-\lambda_0-\lambda_1)\leqslant q<\infty$. 由引理 12 和存在的子空间 $M_1\subset N[(T-\lambda_0-\lambda_1)^q]$, $X=R(T-\lambda_0-\lambda_1)\oplus M_1$, 及 $N[(T-\lambda_0-\lambda_1)^q]\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}R[(T-\lambda_0-\lambda_1)^n]\subseteq R(T-\lambda_0-\lambda_1)$, 因此有 $M_1=\{0\}$, $\beta(T-\lambda_0-\lambda_1)=0$, 从而当 $0<|\lambda|<\varepsilon$ 时, $\beta(T-\lambda_0-\lambda)=0$. 由引理 4 可知, $\mathrm{des}(T-\lambda_0)<\infty$, 所以 $T-\lambda_0\in B_-(X)$. 这与 $\lambda_0\in\sigma_{rb}(T)$ 矛盾, 式(10) 得到证明. 再由引理 14 得

$$\eta(\sigma_{rb}(\boldsymbol{M}_C)) = \eta(\sigma_{rw}(\boldsymbol{M}_C)) = \eta(\sigma_{rw}(A) \cup \sigma_{rw}(B)) = \eta(\sigma_{rb}(A) \cup \sigma_{rb}(B)). \tag{11}$$

若 $\lambda_0 \in [\sigma_{rb}(A) \cup \sigma_{rw}(B)] \setminus \sigma_{rb}(\boldsymbol{M}_C)$, 由于式(9)有 $\lambda_0 \in \sigma_{rb}(A) \setminus \sigma_{rb}(B)$, 因此, 式(7)得证. 式(8)由式(6), (10)及式(11)可得.

推论 6 若 $\sigma_{rb}(A) \setminus \sigma_{rb}(B)$ 没有内点, 则对任意的 $C \in B(Y, X)$ 有

$$\sigma_{rb}(\boldsymbol{M}_C) = \sigma_{rb}(A) \cup \sigma_{rb}(B).$$

特别地, 当 $A \in B(Y)$ 或 $B \in B(Y)$ 是紧算子(或黎斯算子)时, 上式成立.

参考文献:

[1] HAN J K, LEE H Y, LEE W Y. Invertible completions of 2* 2 upper triangular operator matrices[J]. PAMS, 1999, (128): 119-123.

[2] CAO X H, GUO M Z, MENG B. Weyl's theorem for upper triangular operator matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2005, (402): 61-73.

[3] LEE W Y. Weyl spectra of operator matrices[J]. PAMS, 2000, (129): 131-138.

[4] HWANG I S, LEE W Y. The boundedness below of 2* 2 upper triangular operator matrices[J]. Integr Equ Oper Theory, 2001, (39): 267-276.

[5] CAO X H, GUO M Z, MENG B. Semi-fredholm spectrum and Weyl's theory for operator matrices[J]. Acta Mathematica Sinica, 2006, (22): 169-178

[6] 康威 J B. 单复变函数[M]. 吕以辇, 等译. 上海: 上海科学技术出版社, 1985.

[7] LEE W Y. A generalization of the punctured neighborhood theorem[J]. PAMS, 1993, (117): 107-109.

[8] TAYLOR A E. Theorems on ascent, descent, nullity and defect of linear operators[J]. Math Ann, 1966, (163): 18-49

[9] 钟怀杰. 巴拿赫空间结构和算子理想[M]. 北京: 科学出版社, 2005

[10] AIENA P. Fredholm and local spectral theory with application to multipliers[M]. Dordrecht: Kluwer Acad Publishers, 2004.

Left(Right) Browder Spectra of 2* 2 Upper Triangular Operator Matrices

CHEN Xiao-ling[1], ZHONG Huai-jie[2]

(1. School of Sciences, Jimei University, Xiamen 361021, China;

2. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China)

Abstract: Let X and Y be complex Banach spaces, $\boldsymbol{M}_C$ be an upper triangular operator matrix with given $A \in B(X)$, $B \in B(Y)$ and any $C \in B(Y \oplus X)$, $\sigma_{lb}\boldsymbol{M}_C = \{\lambda \in C: \boldsymbol{M}_C) - \lambda B + (X \oplus Y)\}$ be the left Brooder spectra and $\sigma_{rb}(\boldsymbol{M}_C) = \{\lambda \in C: \boldsymbol{M}_C) - \lambda B_-(X \oplus Y)\}$ be the right Browder spectra of $\boldsymbol{M}_C$, where $B_-(X \oplus Y) = \{T \in \Phi_-(X \oplus Y): \mathrm{des}(T) < \infty\}$. It is shown that the passage from $\sigma_{lb}(\boldsymbol{M}_C)$ ($\sigma_{rb}(\boldsymbol{M}_C)$) to $\sigma_{lb}(A) \cup \sigma_{lb}(B) | \sigma_{rb}(A) \cup \sigma_{rb}(B)$ is accomplished by filling holes, that is, there is an equality $\sigma^*(A) \cup \sigma^*(B) = \sigma^*(\boldsymbol{M}_C) \cup W$, where W is the union of certain holes in $\sigma^*(\boldsymbol{M}_C)$ and $\sigma^* \in \{\sigma_{lb}, \sigma_{rb}\}$. Furthermore, the exact location of W is found.

Keywords: Banach space; operator matrix; left browder spectra; right browder spectra

(责任编辑: 黄仲一)