第 27 卷 第 3 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 27 No. 3
2006 年 7 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul. 2006

文章编号: 1000-5013(2006)03-0327-03

# 一个 $N$ 维 Hamilton 系统的 Painlevé 分析与精确解

梁小花, 张金顺

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 考虑一个 Hamilton 函数为 $H=\frac{1}{2}<\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}>+\frac{1}{2}<\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}>^2+\frac{1}{2}<\Lambda\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}>$ 的 $N$ 维 Hamilton 系统, 它与无穷维可积系统的经典例子——Kdv 方程的 Lax 对密切相关的. 利用 Painlevé 分析的方法, 证明该 $N$ 维 Hamilton 系统的是完全可积的, 并得到其自 Bäcklund 变换. 通过研究相关的 Schwardz 导数方程的性质, 求出系统解的内积形式的精确表达式及 Jacobi 椭圆函数形式的解.

关键词: Painlevé 分析; Hamilton 系统; Bäcklund 变换; Schwardz 导数
中图分类号: O 175.29 文献标识码: A

有限维可积系统在数学、物理等领域有重要意义. 每一个有限维可积系统的发现都会引起轰动, 例如 Kovalevskaya 陀螺、椭球上的测地流等. 近年来, 人们发现有限维可积系统与孤立子理论有紧密联系, 通过对孤立子系统的 Lax 对进行适当的约束, 可以得到有限维可积系统[1-2]. 本文将 Painlevé 方法[3-5] 应用于研究一个 $N$ 维三次 Hamilton 系统的可积性, 该系统与无穷维可积系统的经典例子——KdV 方程有密切关系[1,4]. 通过 Painlevé 分析, 证明该 Hamilton 系统是可积的, 并求出 Bäcklund 变换. 此外, 通过求解 Schwartz 导数方程, 求出该 Hamilton 系统的精确解.

## 1 $N$ 维 Hamilton 系统的 Painlevé 分析与 Bäcklund 变换

$N$ 维 Hamilton 系统

$$\boldsymbol{q}'=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}},\qquad \boldsymbol{p}'=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}. \tag{1}$$

其中, $H=\frac{<\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}>}{2}+\frac{<\boldsymbol{q},\Lambda\boldsymbol{q}>}{2}+\frac{<\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}>^2}{2}$, $\Lambda\equiv\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)$, $\boldsymbol{q}\equiv(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_N)$, $<\cdot,\cdot>$ 为 $N$ 维欧氏空间的内积. 即

$$\boldsymbol{q}'=\boldsymbol{p},\qquad \boldsymbol{q}'=-2<\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{q}>\boldsymbol{q}-\Lambda\boldsymbol{q}. \tag{2}$$

或 $N$ 维方程组

$$\boldsymbol{q}''=-2<\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{q}>\boldsymbol{q}-\Lambda\boldsymbol{q}. \tag{3}$$

利用 Painlevé 分析导出主导项的指数 $\alpha=-1$. 令 Painlevé 展开式为

$$\boldsymbol{q}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\varphi^{k-1}c. \tag{4}$$

其中, $a_k\equiv(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kN})$, $\varphi\equiv\varphi(x)$ 称为奇异流形. 将其代入式(3), 比较 $\varphi$ 的同次幂系数, 得

$$\varphi^{-3}: 2a_0\varphi_x^2-2<a_0,a_0>a_0=0, \tag{5}$$

$$\varphi^{-2}: -2a_{0x}\varphi_x a_0\varphi_{xx}-2<a_0,a_0>a_1-4<a_0,a_1>a_0=0, \tag{6}$$

$$\varphi^{-1}: a_{0xx}=-\Lambda a_0-2<a_0,a_0>a_2-4<a_0,a_1>a_1-4<a_0,a_2>a_0-2<a_1,a_1>a_0, \tag{7}$$

$$\varphi^0: 2a_3\varphi_x^2+a_2\varphi_{xx}=2\varphi_x a_{2x}+a_{1xx}=-\Lambda a_1-2\sum_{k+l+m=3}<a_k,a_1>a_m, \tag{8}$$

收稿日期: 2006-11-17
作者简介: 梁小花(1980-), 女, 助教, 主要从事孤立子理论和可积系统的研究. E-mail: xhliang@hqu.edu.cn.
基金项目: 国务院侨办科研基金资助项目(06QZR12); 华侨大学科研基金资助项目(07BS106)

$$\varphi^{k-1}: a_{kxx} + 2ka_{k+1,x}\varphi_x + k\varphi_{xx}a_{k+1} + k(k+1)a_{k+2}\varphi_x^2 =$$
$$-\Lambda a_k - 2\sum_{k+l+m=k+3}\langle a_k, a_l\rangle a_m, \qquad k=2,3,\cdots. \tag{9}$$

经计算可知,调谐因子 $k=-3,2$,因此 $a_4$ 可自由选取.选取 $a_2=a_3=a_4=0$,则利用式(5),(9),可以取 $a_4\equiv 0$,$k=5,6,\cdots$,即 Painlevé 展开式(4)被成功"截断",从而 $N$-维 Hamilton 系统(2)具有 Painlevé 性质.利用关系式(5),(9),经计算可以得出

$$\langle a_0, a_0\rangle = -\varphi_x^2, \qquad \langle a_0, a_1\rangle = \varphi_{xx}/2, \tag{10}$$

$$a_1 = a_0\varphi_{xx}^2/(2\varphi_x^2) - a_{0x}/\varphi_x, \tag{11}$$

$$a_{xx} + \Lambda a_0 + 2\langle a_1, a_1\rangle a_0 + 4\langle a_0, a_1\rangle a_1 = 0, \tag{12}$$

$$a_{1xx} + \Lambda a_1 + 2\langle a_1, a_1\rangle a_1 = 0. \tag{13}$$

由式(13)知,$a_1$ 和 $\boldsymbol{q}$ 同时满足 $N$-维 Hamilton 系统(2).

**命题 1** $N$-维 Hamilton 系统(3)有 Bäckland 变换,即

$$\boldsymbol{q} = \varphi^{1}a_0 + a_1 \tag{14}$$

$$\langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}\rangle = (\ln\varphi)_{xx} + \langle a_1, a_1\rangle. \tag{15}$$

其中,$\{\varphi, x\} + \alpha = 0$,以及

$$\{\varphi, x\} \equiv \frac{\varphi_{xxx}}{\varphi_x} - \frac{3}{2}\frac{\varphi_{xx}^2}{2\varphi_x^2} \tag{16}$$

是 Schwardz 导数,$\alpha=$ const.$ .

证明 利用式(5),(13),经过计算,可得出

$$\frac{4}{\varphi^x}\langle a_0, \Lambda a_0\rangle = \frac{1}{2}\{\varphi, x\} + c_1, \qquad \frac{4}{\varphi^x}\langle a_0, \Lambda a_0\rangle = \{\varphi, x\} + c_2,$$

$c_1$,$c_2$ 为积分常数.因此,式(16)得证.

由于 Hamilton 系统(2)的特殊性质,其显式解不易直接求出.我们在命题1的论证过程中发现,其解的内积形式可以完全用奇异流形 $\varphi$ 来表示为

$$\langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}\rangle = \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} - \frac{1}{4}\frac{\varphi_{xx}^2}{\varphi_x^2} + \frac{\alpha}{3}. \tag{17}$$

## 2 Hamilton 系统的精确解

对于 Hamilton 系统(3),我们利用 Bäckland 变换(15)求精确解.首先求解 Schwardz 导数方程

$$\{\varphi, x\} + \alpha = 0, \tag{18}$$

将其变形为 $\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x}\right)_x - \alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x}\right)^2$.设 $y=\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x}\right)_x$,得

$$y_x = -\alpha + y^2/2. \tag{19}$$

直接验证可得如下结论.即

**命题 2** 设 $y$ 是式(19)的一个解,则 $y_1=2\alpha/y$ 仍是式(19)的解.从式(19)可求得解为

$$y = \sqrt{2\alpha}\,\frac{1+\mathrm{e}^{\sqrt{2\alpha}(x+c_1)}}{1-\mathrm{e}^{\sqrt{2\alpha}(x+c_1)}}, \qquad y_1 = \frac{2\alpha}{y} = \sqrt{2\alpha}\,\frac{1+\mathrm{e}^{\sqrt{2\alpha}(x+c_1)}}{1-\mathrm{e}^{\sqrt{2\alpha}(x+c_1)}}.$$

经过计算和选取适当顶积分常数,我们求出了 Hamilton 系统(2)内积形式的解为

$$\langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}\rangle = \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{4}\left[\left(\ln\frac{\varphi_x}{\varphi^2}\right)_x\right]^2 = \frac{1}{12}\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(x+c)+\delta\right),$$

其中,$\delta\equiv\sqrt{2/3}$.对于 Schwardz 导数方程 $\{\varphi, x\}+\alpha=0$,可以将其变形为

$$y_x^2 = \frac{1}{4}y^2 + \alpha y^2 + \alpha^2, \tag{20}$$

该方程有 Jacobi 椭圆函数解 $y=sn(x)$.因此,Hamilton 系统(2)内积形式的解还可以用 Jacobi 椭圆函数表示.

## 3 结束语

本文着重讨论 Hamilton 系统(1) 的分析性质. 由于其精确解的复杂性, 未能直接求出. 通过 Schwardz 导数方程, 求出了系统的内积形式的解. 如何求出系统的精确解, 是一个有意义的问题.

参考文献:


[1] CAO Ce-wen. Acta mathematics sinica[J]. New Series, 1991, (7): 216-223.

[2] ZHANG J S. Explicit solutions of a finite-dimensional integrable system[J]. Phys Lett A, 2005, (348): 24-27.

[3] WEISS J, TABOR M, CARNEVALE G. The painleve property for partial differential equation[J]. J Math Phys, 1984, (24): 329-331.

[4] CONTE R, MUSETTE M, GRUNDLAND A M. A reduction of the resonant three-wave interation to the generic six painleve equation[J]. J Phys A, 2006, (39): 12115-12127.

[5] STEEB W H, EULER N. Nonlinear evolution equations and Painlevé test[M]. Sigapore: World Scientetifis, 1988.


# Painlevé Test and Explicit Solution for a $N$ Dimensional Hamiltonian System


LIANG Xiao-hua, ZHANG Jin-shun

(College of Mathematics Science, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)



**Abstract:** In this paper we consider a $N$ dimensional Hamiltonian system with Hamiltonian function: $H = \frac{1}{2}<\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}> + \frac{1}{2}<\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}>^2 + \frac{1}{2}<\Lambda\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}>$. It has a relation with the Lax pairs of KdV equation. The integrability is proved and an auto-Bäckland transfomation is obtained by means of the Painlevé test. Explicit solutions in inner product form are also obtained for the $N$ dimensional Hamiltonian system.



**Keywords:** Painlevé test; Hamiltonian system; Bäckland transfomation; Schwarz derivative


(责任编辑: 黄仲一)