第28卷 第3期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.28 No.3
2007年7月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul. 2007

文章编号: 1000-5013(2007)03-0323-04

Banach 空间中局部强伪压缩映射的新不动点定理

许绍元

(赣南师范学院 数学与计算机学院, 江西 赣州 341000)

摘要: 利用Banach空间中局部强伪压缩映射的一个基本不动点定理, 在适当的边界条件下,得到了Banach空间中局部强伪压缩映射的新不动点定理. 特别地,得到Banach空间中局部强伪压缩映射的Altman定理、Roth定理和Petryshyn定理, 以及定理的各种推广形式.

关键词: 局部强伪压缩映射; 不动点; Banach空间; Altman定理; Roth定理; Petryshyn定理

中图分类号: O 177.91 文献标识码: A

1 定义

众所周知, 局部强伪压缩映射是一类十分重要的非线性算子, 广泛存在于非线性微分方程中, 而局部强伪压缩映射不动点定理在研究这些方程的解的存在性方面起着十分重要的作用[1-8].

设 X 是Banach空间, D 为 X 的一个开子集, 记 $\overline{D}$ 和 ∂D 分别为 D 的闭包和边界.

定义[1] 映射 $A: D\subset X\to X$ 称为局部 k-强伪压缩的 $(k>0)$, 如果对于任意 $x\in D$, 存在一个邻域 U, 使得

$$(\lambda-k)\|u-v\|\leqslant\|(\lambda I-A)(u)-(\lambda I-A)(v)\|,\qquad\forall u,v\in U,\quad\lambda>k.\tag{1}$$

上式中, I 为恒等算子. 当 $k<1$ 时, 称 A 为局部强伪压缩映射; 当 $k=1$ 时, 称 A 为局部伪压缩映射.

2 主要结果

首先, 我们给出Banach空间中局部强伪压缩映射的一个基本不动点定理.

命题1 设 X 是Banach空间, D 为 X 的一个开子集, $A:\overline{D}\to X$ 为连续的局部强伪压缩映射, 并且存在 $x_0\in\partial D$, 使得

$$Ax-x_0\neq\lambda(x-x_0),\qquad\forall x\in\partial D,\quad\lambda>1,$$

则 A 在 $\overline{D}$ 上至少有一个不动点. 由命题1立即有

引理1 设 X 是Banach空间, D 为 X 的一个开子集, $\theta\in D$. 若 $A:\overline{D}\to X$ 为连续的局部强伪压缩映射, 满足

$$Ax\neq\lambda x,\qquad\forall x\in\partial D,\quad\lambda\geqslant1.\tag{2}$$

则 A 在 D 上至少有一个不动点. 由引理1可以得到, Banach空间中局部强伪压缩映射的若干新不动点定理.

定理1 设 X 是Banach空间, D 为 X 的一个开子集, $\theta\in D$. 若 $A:\overline{D}\to X$ 为连续的局部强伪压缩映射, 并且存在 $\alpha>1$, $\beta\geqslant0$, 使得

$$\|Ax-x\|^{\alpha}\geqslant\|Ax\|^{\alpha+\beta}\|x\|^{-\beta}-\|x\|^{\alpha},\qquad\forall x\in\partial D,\tag{3}$$

则 A 在 $\overline{D}$ 上至少有一个不动点.

收稿日期: 2007-01-18

作者简介: 许绍元(1964-), 男, 教授, 博士后, 主要从事非线性泛函分析与分形几何的研究. E-mail: xushaoyuan@126.com.

基金项目: 江西省自然科学基金资助项目(0611005); 江西省教育厅科技计划项目([2006]239)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

证明 若算子 A 在 ∂D 上没有不动点, 下面用反证法证明满足引理1中条件(2). 即若不然, 则存在 $x_0\in\partial D$ 以及 $\mu_0\geqslant 1$, 使得 $Ax_0=\mu_0 x_0$. 容易看出 $\mu_0>1$. 考察函数 $f(t)=(t-1)^{\alpha}-t^{\alpha+\beta}+1,\quad \forall t\geqslant 1$. 由于 $f'(t)=\alpha(t-1)^{\alpha-1}-(\alpha+\beta)t^{\alpha+\beta-1}<0$, $f(t)$ 在 $[1,\infty)$ 上严格单调递减. 又当 $t>1$ 时有 $f(t)<f(1)$, 即 $t^{\alpha+\beta}-1>(t-1)^{\alpha}$ 对任意 $t>1$ 成立, 注意 $\|x_0\|\neq 0$, $\mu_0>1$. 于是, 有

$$\|Ax_0-x_0\|^{\alpha}=\|\mu_0x_0-x_0\|^{\alpha}=(\mu_0-1)^{\alpha}\|x_0\|^{\alpha}<$$
$$(\mu_0^{\alpha+\beta}-1)\|x_0\|^{\alpha+\beta}\|x_0\|^{-\beta}=\|\mu_0x_0\|^{\alpha+\beta}\|x_0\|^{-\beta}-\|x_0\|^{\alpha}=$$
$$\|Ax_0\|^{\alpha+\beta}\|x_0\|^{-\beta}-\|x_0\|^{\alpha},$$

此与式(3)矛盾, 故由引理1可知定理1结论成立. 证毕.

在定理1的条件中分别取 $\beta=0$ 和 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, 即可得到下面两个推论.

推论1 设 X 是 Banach 空间, D 为 X 的一个开子集, $\theta\in D$. 若 $A:\overline{D}\to X$ 为连续的局部强伪压缩映射, 并且存在 $\alpha>1$, 使得

$$\|Ax-x\|^{\alpha}\geqslant\|Ax\|^{\alpha}-\|x\|^{\alpha},\qquad \forall x\in\partial D,$$

则 A 在 $\overline{D}$ 上至少有一个不动点.

注1 在推论1中, 令 $\alpha=2$, 即得局部强伪压缩映射的 Altman 定理(见下文推论11的条件(3)).

推论2 设 X 是 Banach 空间, D 为 X 的一个开子集, $\theta\in D$. 若 $A:\overline{D}\to X$ 为连续的局部强伪压缩映射, 并且满足下列条件. 存在 $\alpha>1$, 使得

$$\|Ax-x\|^{3/2}\|x\|^{1/2}\geqslant\|Ax\|^{2}-\|x\|^{2},\qquad \forall x\in\partial D,$$

则 A 在 $\overline{D}$ 上至少有一个不动点.

定理2 设 X 是 Banach 空间, D 为 X 的一个开子集, $\theta\in D$. 若 $A:\overline{D}\to X$ 为连续的局部强伪压缩映射, 并且存在 $\alpha>1$, $\beta\geqslant 0$, 使得

$$\|Ax+x\|^{\alpha+\beta}\leqslant\|Ax\|^{\alpha}\|x\|^{\beta}+\|x\|^{\alpha+\beta},\qquad \forall x\in\partial D,\tag{4}$$

则 A 在 $\overline{D}$ 上至少有一个不动点.

证明 若算子 A 在 ∂D 上没有不动点, 下面用反证法证明 A 满足引理1中条件(2). 即若不然, 则存在 $x_0\in\partial D$ 以及 $\mu_0\geqslant 1$, 使得 $Ax_0=\mu_0x_0$. 容易看出 $\mu_0>1$. 考察函数 $f(t)=(t+1)^{\alpha+\beta}-t^{\alpha}-1,\quad \forall t\geqslant 1$. 由于 $f'(t)=(\alpha+\beta)(t+1)^{\alpha+\beta-1}-\alpha t^{\alpha-1}>0$, $f(t)$ 在 $[1,\infty)$ 上严格单调递增. 又当 $t>1$ 时有 $f(t)>f(1)$, 即 $t^{\alpha}+1<(t+1)^{\alpha+\beta}$ 对任意 $t>1$ 成立, 注意 $\|x_0\|\neq 0$, $\mu_0>1$. 于是, 有

$$\|Ax_0+x_0\|^{\alpha+\beta}=\|\mu_0x_0+x_0\|^{\alpha+\beta}=(\mu_0+1)^{\alpha+\beta}\|x_0\|^{\alpha+\beta}>$$
$$(\mu_0^{\alpha}+1)\|x_0\|^{\alpha+\beta}=\|Ax_0\|^{\alpha}\|x_0\|^{\beta}+\|x_0\|^{\alpha},$$

此与式(4)矛盾, 故由引理1可知定理2结论成立. 证毕.

在定理2的条件中分别取 $\beta=0$; $\alpha=1$, $\beta=1$ 和 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, 则可得如下3个推论.

推论3 设 X 是 Banach 空间, D 为 X 的一个开子集, $\theta\in D$. 若 $A:\overline{D}\to X$ 为连续的局部强伪压缩映射, 并且存在 $\alpha>1$, 使得

$$\|Ax+x\|^{\alpha}\leqslant\|Ax\|^{\alpha}+\|x\|^{\alpha},\qquad \forall x\in\partial D,$$

则 A 在 $\overline{D}$ 上至少有一个不动点.

推论4 设 X 是 Banach 空间, D 为 X 的一个开子集, $\theta\in D$. 若 $A:\overline{D}\to X$ 为连续的局部强伪压缩映射, 并且满足下列条件

$$\|Ax+x\|^{2}\leqslant\|Ax\|^{2}+\|x\|^{2},\qquad \forall x\in\partial D,$$

则 A 在 $\overline{D}$ 上至少有一个不动点.

推论5 设 X 是 Banach 空间, D 为 X 的一个开子集, $\theta\in D$. 若 $A:\overline{D}\to X$ 为连续的局部强伪压缩映射, 并且满足下列条件

$$\|Ax+x\|^{2}\leqslant\|Ax\|^{3/2}\|x\|^{1/2}+\|x\|^{2},\qquad \forall x\in\partial D,$$

则 A 在 $\overline{D}$ 上至少有一个不动点.

定理3 设 X 是 Banach 空间, D 为 X 的一个开子集, $\theta\in D$. 若 $A:\overline{D}\to X$ 为连续的局部强伪压缩映

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

射, 并且存在 $\alpha \geqslant 1$, $\beta > 0$(或 $\alpha > 1$, $\beta \geqslant 0$), 使得

$$\|Ax - x\|^{\alpha}\|x\|^{\beta} \geqslant \|Ax_0\|^{\alpha}\|Ax + x\|^{\beta} - \|x\|^{\alpha+\beta}, \quad \forall x \in \partial D, \tag{5}$$

则 A 在 $\overline{D}$ 上至少有一个不动点.

证明　若算子 A 在 ∂D 上没有不动点, 下面用反证法证明 A 满足引理 1 中条件(2). 即若不然, 则存在 $x_0 \in \partial D$ 及 $\mu_0 \geqslant 1$, 使得 $Ax_0 = \mu_0 x_0$. 易得出 $\mu_0 > 1$. 考察函数 $f(t) = (t-1)^{\alpha} - t^{\alpha}(t+1)^{\beta} + 1$, $\forall t \geqslant 1$. 由于 $f'(t) = \alpha(t-1)^{\alpha-1} - \alpha t^{\alpha-1}(t+1)^{\beta} - \beta t^{\alpha}(t+1)^{\beta-1} \leqslant 0(<0)$, $f(t)$ 在 $[1, \infty)$ 上严格单调递减. 又当 $t > 1$ 时有 $f(t) < f(1) = 1 - 2^{\beta} < 0(\leqslant 0)$, 即 $(t-1)^{\alpha} < t^{\alpha}(t+1)^{\beta} - 1$ 对任意 $t > 1$ 成立, 注意 $\|x_0\| \neq 0$, $\mu_0 > 1$. 于是, 有

$$\begin{gathered}\|Ax_0 - x_0\|^{\alpha}\|x_0\|^{\beta} = \|\mu_0 x_0 - x_0\|^{\alpha}\|x_0\|^{\beta} = \\ (\mu_0 - 1)^{\alpha}\|x_0\|^{\alpha+\beta} < (\mu_0^{\alpha}(\mu_0 + 1)^{\beta} - 1)\|x_0\|^{\alpha+\beta} = \\ \|Ax_0\|^{\alpha}\|Ax_0 + x_0\|^{\beta} - \|x_0\|^{\alpha+\beta},\end{gathered}$$

此与式(5)矛盾, 故由引理 1 可知定理 3 结论成立. 证毕.

在定理 3 的条件中, 分别取 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 1$, $\beta = 1$, 即可得到下面 2 个推论.

推论 6　设 X 是 Banach 空间, D 为 X 的一个开子集, $\theta \in D$. 若 $A: \overline{D} \to X$ 为连续的局部强伪压缩映射, 并且存在 $\beta > 0$, 使得

$$\|Ax - x\|\|x_0\|^{\beta} \geqslant \|Ax\|\|Ax + x\|^{\beta} - \|x\|^{\beta+1}, \quad \forall x \in \partial D,$$

则 A 在 $\overline{D}$ 上至少有一个不动点.

推论 7　设 X 是 Banach 空间, D 为 X 的一个开子集, $\theta \in D$. 若 $A: \overline{D} \to X$ 为连续的局部强伪压缩映射, 并且满足下列条件

$$\|Ax - x\|\|x\| \geqslant \|Ax\|\|Ax + x\| - \|x\|^2, \quad \forall x \in \partial D,$$

则 A 在 $\overline{D}$ 上至少有一个不动点.

定理 4　设 X 是 Banach 空间, D 为 X 的一个开子集, $\theta \in D$. 若 $A: \overline{D} \to X$ 为连续的局部强伪压缩映射, 并且存在 $\alpha > 1$, $\beta \geqslant 0$, 使得

$$\|Ax + x\|^{\alpha+\beta} \leqslant \|Ax - x\|^{\alpha}\|x\|^{\beta} + \|Ax\|^{\beta}\|x\|^{\alpha}, \quad \forall x \in \partial D, \tag{6}$$

则 A 在 $\overline{D}$ 上至少有一个不动点.

证明　若算子 A 在 ∂D 上没有不动点, 下面用反证法证明 A 满足引理 1 中条件(2). 即若不然, 则存在 $x_0 \in \partial D$ 以及 $\mu_0 \geqslant 1$, 使得 $Ax_0 = \mu_0 x_0$. 容易看出 $\mu_0 > 1$. 考察函数

$$f(t) = (t+1)^{\alpha+\beta} - (t-1)^{\alpha} - t^{\beta}, \quad \forall t \geqslant 1.$$

由于 $f'(t) = \alpha[(t+1)^{\alpha+\beta-1} - (t-1)^{\alpha-1}] + \beta[(t+1)^{\alpha+\beta-1} - t^{\beta-1}] > 0$, $f(t)$ 在 $[1, \infty)$ 上严格单调递增. 又当 $t > 1$ 时有 $f(t) > f(1)$, 即 $(t+1)^{\alpha+\beta} > (t-1)^{\alpha} + t^{\beta}$ 对任意 $t > 1$ 成立, 注意 $\|x_0\| \neq 0$, $\mu_0 > 1$. 于是, 有

$$\begin{gathered}\|Ax_0 + x_0\|^{\alpha+\beta} = \|\mu_0 x_0 + x_0\|^{\alpha+\beta} = (\mu_0 + 1)^{\alpha+\beta}\|x_0\|^{\alpha+\beta} > \\ ((\mu_0 - 1)^2 + \mu_0^{\beta})\|x_0\|^{\alpha+\beta} = \|\mu_0 x_0 - x_0\|^{\alpha}\|x_0\|^{\beta} + \|\mu_0 x_0\|^{\beta}\|x_0\|^{\alpha} = \\ \|Ax_0 - x_0\|^{\alpha}\|x_0\|^{\beta} + \|Ax_0\|^{\beta}\|x_0\|^{\alpha},\end{gathered}$$

此与式(6)矛盾, 故由引理 1 可知定理 4 结论成立. 证毕.

在定理 4 的条件中分别取 $\beta = 0$; $\alpha = 1$, $\beta = 1$ 和 $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, 即可得下面 3 个推论.

推论 8　设 X 是 Banach 空间, D 为 X 的一个开子集, $\theta \in D$. 若 $A: \overline{D} \to X$ 为连续的局部强伪压缩映射, 并且存在 $\alpha > 1$, 使得

$$\|Ax + x\|^{\alpha} \leqslant \|Ax - x\|^{\alpha} + \|x\|^{\alpha}, \quad \forall x \in \partial D,$$

则 A 在 $\overline{D}$ 上至少有一个不动点.

推论 9　设 X 是 Banach 空间, D 为 X 的一个开子集, $\theta \in D$. 若 $A: \overline{D} \to X$ 为连续的局部强伪压缩映射, 并且满足下列条件

$$\|Ax + x\|^2 \leqslant \|Ax - x\|^2 + \|x\|^2, \quad \forall x \in \partial D,$$

则 A 在 $\overline{D}$ 上至少有一个不动点.

推论 10　设 X 是 Banach 空间, D 为 X 的一个开子集, $\theta \in D$. 若 $A: \overline{D} \to X$ 为连续的局部强伪压缩

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

映射, 并且满足下列条件

$$\|Ax+x\|^2 \leqslant \|Ax-x\|^{3/2}\|x\|^{1/2}+\|Ax\|^{1/2}\|x\|^{3/2},\qquad \forall x\in\partial D,$$

则 A 在 $\overline{D}$ 上至少有一个不动点.

由推论 1, 4, 7 和 9, 可以立即得到下面的推论(证明从略).

推论 11 设 X 是 Banach 空间, D 为 X 的一个开子集, $\theta\in D$. 若 $A:\overline{D}\to X$ 为连续的局部强伪压缩映射, 并且满足下列8个条件之一. (1) $\|Ax\|\leqslant\|x\|$, $\forall x\in\partial D$. (2) $\|Ax\|\leqslant\|Ax-x\|$, $\forall x\in\partial D$. (3) $\|x-Ax\|^2\geqslant\|Ax\|^2-\|x\|^2$, $\forall x\in\partial D$. (4) $\|Ax+x\|\leqslant\|Ax\|$, $\forall x\in\partial D$. (5) $\|Ax+x\|\leqslant\|x\|$, $\forall x\in\partial D$. (6) $\|Ax+x\|\leqslant\|Ax-x\|$, $\forall x\in\partial D$. (7) $\|Ax\|\,\|Ax+x\|\leqslant\|x\|^2$, $\forall x\in\partial D$. (8) $\|Ax\|\,\|Ax+x\|\leqslant\|Ax-x\|\,\|x\|$, $\forall x\in\partial D$. 则 A 在 $\overline{D}$ 上至少有一个不动点.

注 2 推论 11 的条件(1)~(3)分别是局部强伪压缩映射的 Roth 定理、Petryshyn 定理和 Altman 定理; 而推论 4, 7, 9 和推论 11(4)~(8)则是这些定理的有益补充.

参考文献:

[1] MORALES C H. On the fixed-point theory for locally k-pseudocontractions[J]. Proc Amer Math Soc, 1981, 81(1): 71-74.

[2] MORALES C H, MUTANGADURA S A. On the approximation of fixed points for locally pseudocontractive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1995, 123(2): 417-423.

[3] MORALES C H. Strong convergence theorems for locally pseudo-contractive mappings in Banach spaces[J]. Houston J Math, 1990, 16(2): 549-557.

[4] MORALES C H, MUTANGADURA S A. On a fixed point theorem of Kirk[J]. Proc Amer Math Soc, 1995, 123(11): 3 397-3 401.

[5] KIRK W A. A fixed point theorem for local pseudo-contractions in uniformly convex spaces[J]. Manuscript Math, 1979, 30(1): 89-102.

[6] KIRK W A, MORALES C H. Fixed point theorem for local strong pseudo-contractions[J]. Nonlinear Anal, 1980, 4(2): 363-368.

[7] MARTIN R H. Differential equations on closed subsets of a Banach spaces[J]. Trans Amer Math Soc, 1973, 179(2): 399-414.

[8] GUO Da-jun. Existence and uniqueness of positive fixed points for mixed monotone operators and applications[J]. Appl Anal, 1992, 46(1): 91-100.

New Fixed Point Theorems for Local Strong Pseudo-Contraction in Banach Spaces

XU Shao-yuan

(School of Mathematics and Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou 341000, China)

Abstract: In this paper, based on a basic result on local strong pseudo-contraction, some new fixed point theorems for local strong pseudo-contraction are obtained. As a result, the famous Altman′s theorem, Roth′s theorem and Petryshyn theorem for such class of mappings are obtained and generalized.

Keywords: local strong pseudo-contraction; fixed point; Banach space; Altman′s theorem; Roth′s theorem; Petryshyn′ theorem

(责任编辑: 黄仲一)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net