第28卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 28 No. 2
2007年4月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 2007

文章编号: 1000-5013(2007)02-0216-04

Albrecht 五层显式格式的破译

单双荣, 曾文平

(华侨大学 数学系, 福建 泉州 362021)

摘要: 利用加耗散项的方法, 重新构造了解四阶杆振动方程的 Albrecht 五层显式差分格式, 并证明其局部截断误差阶为 $O(\tau^2+h^2+(\frac{\tau}{h})^2)$, 且是绝对稳定的. 进而说明利用这种方法构造的同类格式是唯一的, 它就是 Albrecht 格式.

关键词: 显式差分格式; 四阶杆振动方程; Albrecht; 稳定性

中图分类号: O 175.4 文献标识码: A

在实际问题中, 特别是弹性体振动问题, 经常遇到要解四阶杆振动方程. 从数学上说, 它可以化为解四阶抛物型偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0. \tag{1}$$

1960年, Саудьев[1] 介绍了 Albrecht[2] 于1957年提出的解四阶杆振动方程(1)的一个五层显式差分格式

$$\left(\frac{4\tau^2}{h^4}+1\right)u_j^{n+2}-\frac{8\tau^2}{h^4}\left(u_{j-1}^{n+1}+u_{j+1}^{n+1}\right)+\frac{4\tau^2}{h^4}\left(u_{j-2}^{n}+u_{j+2}^{n}\right)+$$
$$2\left(\frac{8\tau^2}{h^4}-1\right)u_j^n-\frac{8\tau^2}{h^4}\left(u_{j-1}^{n-1}+u_{j+1}^{n-1}\right)+\left(\frac{4\tau^2}{h^4}+1\right)u_j^{n-2}=0, \tag{2}$$

并指出其截断误差阶为 $O(h^2)$, 虽是显式格式却是绝对稳定的. 他也指出该格式中出现五层上的值(代替三层), 这是它的重大缺点. 其中, τ为时间 t 的步长, h 为空间 x 的步长. 长期以来, 如何构造 Albrecht 五层格式的, 如何证明格式的稳定性, 以及是否存在其他的五层显式绝对稳定的差分格式, 一直困扰着研究者. 本文利用加耗散项的方法, 重新构造了解四阶杆振动方程(1)的 Albrecht 五层显式差分格式, 并指出, 当 $\tau=O(h^2)$时, 其局部截断误差阶为 $O(\tau^2+h^2+(\frac{\tau}{h})^2)=O(h^2)$, 即达到二阶精度, 且它是绝对稳定的. 文中进一步说明, 利用这种方法构造的格式的局部截断误差阶为 $O(h^2)$, 且绝对稳定的五层显式格式是唯一的, 此即 Albrecht 格式. 至于可否利用其他方法, 构造新的五层绝对稳定显式格式, 则有待进一步研究.

1 差分格式的构造

在方程(1)的右端加入耗散项 $-\varepsilon\frac{\tau^4}{h^4}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$, 使之成为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=-\varepsilon\frac{\tau^4}{h^4}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4},\qquad \varepsilon>0. \tag{3}$$

上式中, ε为待定参数. 加以离散化, 构造出五层显式差分格式为

$$\frac{\delta_{2t}^2 u_j^n}{4\tau^2}-2\,\frac{\delta_x^2 u_j^{n+1}+\delta_x^2 u_j^{n-1}}{h^4}+4\,\frac{\delta_{2x}^2 u_j^n}{4h^4}=-\varepsilon\left(\frac{\tau}{h}\right)^4\frac{\delta_t^4 u_j^n}{\tau^4}. \tag{4}$$

收稿日期: 2006-07-13

作者简介: 单双荣(1956-), 男, 副教授, 主要从事偏微分方程数值解的研究. E-mail: shansr@163.com.

基金项目: 国务院侨办科研基金资助项目(04QZR09)

式中, δ_x^2, δ_{2x}^2, δ_{2t}^2 和 δ_t^4 分别为表示空间 x 及时间 t 的中心差分算子, 即

$$\left.\begin{aligned}
\delta_x^2 u_j^n &= u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n, \\
\delta_{2x}^2 u_j^n &= u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n, \\
\delta_{2t}^2 u_j^n &= u_j^{n+2} - 2u_j^n + u_j^{n-2}, \\
\delta_t^4 u_j^n &= u_j^{n+2} - 4u_j^{n+1} + 6u_j^n - 4u_j^{n-1} + u_j^{n-2}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

通过适当选取参数 ε, 可获得具有较好稳定性的差分格式.

在点 $(jh, n\tau)$ 处进行 Taylor 展开, 可得(为简便计, 右端项略去上、下标)

$$\frac{\delta_{2t}^2 u_j^n}{4\tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{3}\tau^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + O(\tau^4), \tag{6}$$

$$\frac{\delta_x^2 u_j^n}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{12}h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{360}h^4 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O(h^6). \tag{7}$$

由式(7)易得

$$-2\,\frac{\delta_x^2 u_j^{n+1} + \delta_x^2 u_j^{n-1}}{h^4} = -\frac{2}{h^4}\delta_x^2\left(2u_j^n + \tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^4)\right) =$$

$$-\frac{4}{h^4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{3}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{h^2}{90}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - 2\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial t^2 \partial x^4} + O\left(h^4 + \tau^4 + \frac{\tau^4}{h^2}\right), \tag{8}$$

$$4\,\frac{\delta_{2x}^2 u_j^n}{4h^4} = \frac{4}{h^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4}{3}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{8}{45}h^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O(h^4), \tag{9}$$

$$-\varepsilon\left(\frac{\tau}{h}\right)^4 \frac{\delta_t^4 u_j^n}{\tau^4} = -\varepsilon\left(\frac{\tau}{h}\right)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + O\left(\frac{\tau^6}{h^4}\right). \tag{10}$$

于是, 利用式(6), (8), (9), 以及方程(1), 可得格式(4)的截断误差为

$$R_j^n = \frac{1}{2}\tau^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{1}{6}h^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - 2\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + O\left(h^4 + \tau^4 + \left(\frac{\tau}{h}\right)^4\right). \tag{11}$$

注意到, 杆振动方程网格比 $r = \frac{\tau}{h^2}$, 即 $\tau = O(h^2)$. 因此, 格式(4)的截断误差阶实际为

$$R_j^n = O\left(h^2 + \tau^2 + \left(\frac{\tau}{h}\right)^2\right) = O(h^2).$$

2 稳定性分析

为研究差分格式(4)的稳定性, 需要如下引理.

引理[3]　实系数四次方程

$$x^4 + px^3 + qx^2 + \bar{r}x + e = 0 \tag{12}$$

的 4 个根按模小于等于 1 的充要条件: (1) $|p + \bar{r}| \leqslant 1 + q + e$; (2) $|3p + \bar{r}| \leqslant 4 + 2q$; (3) $|3p| \leqslant 6 + q$; (4) $|p| \leqslant 4$; (5) $|e| \leqslant 1$; (6) $(1-e)^2(1+e-q) - (p-\bar{r})(ep-\bar{r}) \geqslant 0$; (7) $1 - \frac{q}{2} + \frac{p^2}{8} \geqslant 0$.

下面, 用 Fourier 方法[4] 讨论差分格式(4)的稳定性. 令 $u_j^n = \rho^n e^{ij\theta}$, ($i^2 = -1$, $|\theta| < \pi$) 代入方程(4), 得到形如式(12)的四次方程传播矩阵的特征方程, 其中系数 $p = \bar{r} = \frac{-16\varepsilon r^2 + 32r^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + 4\varepsilon r^2}$, $q = \frac{-2 + 24\varepsilon r^2 - 16r^2\sin^2\theta}{1 + 4\varepsilon r^2}$, $e = 1$; $r = \frac{\tau}{h^2}$, 并设参数 $\varepsilon > 0$. 于是, 对照引理, 有

(1) $|p + \bar{r}| = |(32\varepsilon r^2 - 64r^2\sin^2(\frac{\theta}{2}))/(1 + 4\varepsilon r^2)| \leqslant 1 + q + e = (32\varepsilon r^2 - 16r^2\sin^2\theta)/(1 + 4\varepsilon r^2) = \{32\varepsilon r^2 - 64r^2\sin^2(\frac{\theta}{2}) + 64r^2\sin^4(\frac{\theta}{2})\}/(1 + 4\varepsilon r^2)$. 即 $-32\varepsilon r^2 + 16r^2\sin^2\theta \leqslant 32\varepsilon r^2 - 64r^2\sin^2\frac{\theta}{2} \leqslant 32\varepsilon r^2 - 64r^2\sin^2\frac{\theta}{2} + 64r^2\sin^4\frac{\theta}{2}$, 右端不等式自然成立; 而当 $\varepsilon \geqslant 1$ 时, 左端 $= 64\varepsilon r^2 - 64r^2\sin^2\frac{\theta}{2} - 64r^2\sin^2\frac{\theta}{2} + 64r^2\sin^4\frac{\theta}{2} \geqslant 64r^2(1 - \sin^2\frac{\theta}{2})^2 \geqslant 0$.

(2) $|3p+\bar{r}|=|(64\varepsilon^2-128r^2\sin^2\frac{\theta}{2})/(1+4\varepsilon^2)|\leqslant 4+2q=(64\varepsilon^2-128r^2\sin^2\frac{\theta}{2}+128r^2\cdot\sin^4\frac{\theta}{2})/(1+4\varepsilon^2)$. 即 $128r^2\sin^2\frac{\theta}{2}-128r^2\sin^4\frac{\theta}{2}-64\varepsilon^2\leqslant 64\varepsilon^2-128r^2\sin^2\frac{\theta}{2}\leqslant 64\varepsilon^2-128r^2\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}+128r^2\sin^4\frac{\theta}{2}$. 上述右端不等式自然成立; 而当 $\varepsilon\geqslant 1$ 时, 左端 $=128\varepsilon^2-256r^2\sin^2\frac{\theta}{2}+128r^2\cdot\sin^4\frac{\theta}{2}\geqslant 128r^2(1-\sin^2\frac{\theta}{2})^2\geqslant 0$.

(3) $|3p|=|(48\varepsilon^2-96r^2\sin^2\frac{\theta}{2})/(1+4\varepsilon^2)|\leqslant 6+q=(4+48\varepsilon^2-16r^2\sin^2\theta)/(1+4\varepsilon^2)=(4+48\varepsilon^2-64r^2\sin^2\frac{\theta}{2}+64r^2\sin^4\frac{\theta}{2})/(1+4\varepsilon^2)$. 即 $-4-48\varepsilon^2+64r^2\sin^2\frac{\theta}{2}-64r^2\sin^4\frac{\theta}{2}\leqslant 48\varepsilon^2-96r^2\sin^2\frac{\theta}{2}\leqslant 4+48\varepsilon^2-64r^2\sin^2\frac{\theta}{2}+64r^2\sin^4\frac{\theta}{2}$. 上述不等式右端恒成立; 而当 $\varepsilon\geqslant 1$ 时, 左端 $=4+96\varepsilon^2-96r^2\sin^2\frac{\theta}{2}-64r^2\sin^2\frac{\theta}{2}+64r^2\sin^4\frac{\theta}{2}\geqslant 4+96r^2(\frac{1}{36}-\frac{1}{36}\sin^4\frac{\theta}{2})\geqslant 4>0$.

(4) $|p|=|(16\varepsilon^2-32r^2\sin^2\frac{\theta}{2})/(1+4\varepsilon^2)|\leqslant 4$. 即 $-4-16\varepsilon^2\leqslant 16\varepsilon^2-32r^2\sin^2\frac{\theta}{2}\leqslant 4+16\varepsilon^2$ 右端恒成立; 而左端当 $\varepsilon\geqslant 1$ 时也成立.

(5) $e=1$.

(6) 因 $e=1,p=\bar{r}$, 故 $(1-e)^2(1+e-q)-(p-\bar{r})(ep-\bar{r})=0$.

(7) 当 $\varepsilon\leqslant 1$ 时, 有 $1-\frac{q}{2}+\frac{p^2}{8}=(2+8r^2\sin^2\theta+128(1-\varepsilon)r^4\sin^4\frac{\theta}{2})/(1+4\varepsilon^2)\geqslant 0$.

综上所述, 当且仅当 $\varepsilon=1$ 时, 引理成立. 即对任意 $r>0$, Von Neumann 条件成立. 于是有

定理 当且仅当 $\varepsilon=1$, 且 $\tau=O(h^2)$ 时, 五层显式差分格式(4)至少在 Forsythe-Wasow 意义下[5]绝对稳定.

3 释疑

由上述讨论, 便容易回答本文开头所提的两个问题. (1) 当 $\varepsilon=1$ 时, 格式(4)为

$$\frac{u_j^{n+2}-2u_j^n+u_j^{n-2}}{4\tau^2}+\frac{u_j^{n+2}-4u_j^{n+1}+6u_j^n-4u_j^{n-1}+u_j^{n-2}}{h^4}-2\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}+u_{j+1}^{n-1}-2u_j^{n-1}+u_{j-1}^{n-1}}{h^4}+\frac{u_{j+2}^n-2u_j^n+u_{j-2}^n}{h^4}=0. \quad (14)$$

对它稍加变形, 便可以知道它就是 Albrecht 五层显式格式(2). (2) 当 $\tau=O(h^2)$ 时, 式(3)右端的耗散项 $-\varepsilon(\frac{\tau}{h})^4\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}=O(\frac{\tau^4}{h^4})=O(h^4)$, 它对格式(4)的截断误差阶并不起显著影响. 引入耗散项的目的在于提高格式的稳定性. 由稳定性定理可知, 仅当 $\varepsilon=1$ 时的格式(4)(也即 Albrecht 格式)绝对稳定. 因此, 用这种方法构造的截断误差阶为 $O(h^2)$ 且绝对稳定的, 五层显式格式是唯一的, 即 Albrecht 格式.

4 数值例子

考虑杆振动方程初边值问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\ t>0,\\ u(x,0)=\sin x,\quad u_t(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ u(0,t)=u(\pi,t)=u_{xx}(0,t)=u_{xx}(\pi,t)=0, & t>0.\end{cases}$$

其精确解为 $u(x,t)=\sin x\cos t$. 取 $h=\frac{\pi}{20}$, $\tau=rh^2$, $r=\frac{1}{4}$, 1, 4, 按 Albrecht 格式进行计算到 $n=1\,000$, 并与精确解列表比较, 如表 1 所示. 由于对称性, 仅列出 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 的部分结果. 其中, 初边值条件: (1) 由于

Albrecht 格式是五层格式, 除初始两层网格函数值 u_j^0 及 u_j^1 按初始条件离散化计算外, 应用其他方法先计算第 2 及第 3 层网格函数值 u_j^2 及 u_j^3. 为简便计, 这里 u_j^0, u_j^1, u_j^2 及 u_j^3 均按精确值计算. (2) 边界值按中心差分离散, 即有 $u_0^n = u_{20}^n = 0$, $u_{-1}^n = -u_1^n$, $u_{-2}^n = -u_2^n$, $u_{21}^n = -u_{19}^n$, $u_{22}^n = -u_{18}^n$, 等等. 数值结果表明, 理论分析是正确的.

表 1　Albrecht 格式数值表

Tab. 1　The numerical results for Albrecht scheme

r	x	精确解	Albrecht 格式解
$\frac{1}{4}$	$3\pi/20$	$45.100\,831\times 10^{-2}$	$44.975\,571\times 10^{-2}$
	$6\pi/20$	$80.370\,269\times 10^{-2}$	$80.147\,054\times 10^{-2}$
	$9\pi/20$	$98.120\,037\times 10^{-2}$	$97.847\,525\times 10^{-2}$
1	$3\pi/20$	$40.705\,491\times 10^{-2}$	$21.260\,248\times 10^{-2}$
	$6\pi/20$	$72.537\,717\times 10^{-2}$	$37.886\,039\times 10^{-2}$
	$9\pi/20$	$88.557\,666\times 10^{-2}$	$46.253\,168\times 10^{-2}$
4	$3\pi/20$	$-11.852\,071\times 10^{-2}$	$39.437\,343\times 10^{-2}$
	$6\pi/20$	$-21.120\,546\times 10^{-2}$	$70.277\,860\times 10^{-2}$
	$9\pi/20$	$-25.785\,017\times 10^{-2}$	$85.798\,721\times 10^{-2}$

参　考　文　献

[1] САУДЪЕВ В К. 抛物型方程的网格积分法[M]. 袁兆鼎, 译. 北京: 科学出版社, 1963: 140-142.

[2] ALBRECHT J. Zum differenzenverfahren bei parabolischen differentialgleichungen[J]. Z Angew Math und Mech, 1957, 37(5-6): 202-212.

[3] 马驷良, 徐桢殷. 实系数三、四次多项式是 Von Neumann 多项式的充要条件[J]. 高等学校计算数学学报, 1984, (3): 274-280.

[4] RICHTMYER R D, MORTON K W. Difference methods for initial-value problem [M]. 2nd ed. New York: Wiley, 1967: 38-82.

[5] 矢岛信男, 野术达夫. 发展方程的数值分析[M]. 东京: 岩波书店, 1977: 46-232

Uncovering the Albrecht Five-Layer Explicit Difference Scheme

SHAN Shuang-rong, ZENG Wen-ping

(Department of Mathematics, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The Albrecht five-layer explicit difference scheme for solving four order rod vibration equation is reconstructed by introducing dissipative term. It is proved that the order of local truncation error is $O(\tau^2 + h^2 + (\frac{\tau}{h})^2)$, which is absolutely stability. It is shown that the schemes are unique by using this method.

Keywords: explicit difference scheme; four order rod vibration equation; Albrecht; stability

(责任编辑: 黄仲一)