第28卷 第2期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.28 No.2
2007年4月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 2007

文章编号: 1000-5013(2007)02-0212-04

具状态依赖时滞的泛函微分方程周期解

王全义

(华侨大学 数学系, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究一类具有状态依赖时滞的二阶泛函微分方程 T-周期解的存在性问题,利用 k-集压缩算子抽象连续性定理和一些分析技巧,建立保证该类方程存在 T-周期解的充分条件. 这些充分性条件十分简单,容易验证,结果推广和改进了现有文献中的有关结果.

关键词: 泛函微分方程; 周期解; 状态依赖时滞; k-集压缩算子

中图分类号: O 175.14　　**文献标识码**: A

泛函微分方程的周期解存在性问题,一直受到国内外学者的广泛关注[1-4]. 2002 年,鲁世平等[1]利用重合度理论,研究了具有偏差变元的二阶泛函微分方程

$$x''(t) + f(t, x(t), x(t - \tau_0(t)))x'(t) + \beta(t)g(x(t - \tau_1(t))) = p(t) \tag{1}$$

的周期解存在性问题,并得到了一些新结果. 本文将研究一类具有状态依赖时滞的二阶泛函微分方程

$$x''(t) + f(t, x(t), x(t - \tau_1(t, x(t))))x'(t) + \beta(t)g(x(t - \tau_2(t, x(t)))) = p(t) \tag{2}$$

的周期解存在性问题. 其中, $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的连续函数; $f(t, x, y)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的连续函数,且对 $\forall(t, x, y) \in \mathbf{R}^3$, $f(t + T, x, y) = f(t, x, y)$,这里 $T > 0$ 是一常数; $\beta(t)$, $p(t)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的 T-周期连续函数; $\tau_i(t, x)$ $(i = 1, 2)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数, $\forall(t, x) \in \mathbf{R}^2$, $\tau_i(t + T, x) = \tau_i(t, x)$. 利用 k-集压缩算子抽象连续性定理及一些分析技巧,我们得到了方程(1)及(2)存在 T-周期解的充分条件,所得结果推广和改进了文[1]中的相关结果.

1 预备知识

本节简要地叙述一些背景知识.

定义 1 设 X 是一个 Banach 空间, D 是 X 的有界子集. 令

$$\alpha_X(D) = \inf\{\delta > 0 \mid D,\text{可表示为有限个集合的并}: D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i \text{ 且有 } D_i \text{ 的直径 } \mathrm{diam}_X(D_i) \le \delta\}, \tag{3}$$

则称 α_X 为 D 的非紧性测度或 Kuratowski 距离.

定义 2 设 X, Y 均是 Banach 空间, $D \subset X$,算子 $N: D \to Y$ 是连续且有界的. 如果存在常数 $k \ge 0$,对于任何有界集 $E \subset D$,有 $\alpha_Y(N(E)) \le k\alpha_X(E)$,则称 N 是 D 上的 k-集压缩算子[5-6].

如果 $L: \mathrm{dom}\, L \subset X \to Y$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子,由文[5]可知,对于任何有界集 $B \subset \mathrm{dom}\, L$, $\sup\{r \ge 0 \mid r\alpha_X(B) \le \alpha_Y(L(B))\}$ 是存在的,因而我们可定义

$$l(L) = \sup\{r \ge 0 \mid r\alpha_X(B) \le \alpha_Y(L(B)),\text{对任何有界集 } B \subset \mathrm{dom}\, L\}. \tag{4}$$

引理 1[7] 设 $L: \mathrm{dom}\, L \subset X \to Y$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子, $y \in Y$ 是一固定点. 假设 $N: \bar{\Omega} \to Y$ 是 k-集压缩算子, $k < l(L)$, $\Omega \subset X$ 是有界的且关于 $0 \in \Omega$ 对称的开子集,并满足(1) $Lx \ne \lambda Nx + \lambda y$, $\forall x \in \partial\Omega$, $\forall \lambda \in (0, 1)$; (2) $[QNx + Qy, x] \cdot [QN(-x) + Qy, x] < 0$, $\forall x \in \partial\Omega \cap \ker L$,其中 $[\cdot, \cdot]$ 是 $Y \times X$

收稿日期: 2006-10-10

作者简介: 王全义(1955-),男,教授,主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究. E-mail: qywang@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(Z0511026)

的某双线性泛函, $Q: Y \to \operatorname{coker} L$ 是投影算子. 那么,至少存在一个 $x \in \Omega$,满足 $Lx = Nx + y$.

2　主要结果及其证明

在本文中,采用以下记号: $\bar{a} = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)\,\mathrm{d}t$; $|a|_0 = \max_{t\in[0,T]}|a(t)|$. 令 $X = \{x \mid x \in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R}),\ x(t+T) \equiv x(t)\}$, $Y = \{x \mid x \in C(\mathbf{R},\mathbf{R}),\ x(t+T) \equiv x(t)\}$, $Z = \{x \mid x \in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}),\ x(t+T) \equiv x(t)\}$.

定义范数 $\|x\|_0 = \max_{t\in[0,T]}|x(t)|$, $\|x\|_1 = \max\{|x|_0, |x'|_0\}$,及 $\|x\|_2 = \max\{|x|_0, |x'|_0, |x''|_0\}$, 则 X, Z 和 Y 分别在 $\|x\|_2$, $\|x\|_1$, $\|x\|_0$ 之下构成 Banach 空间.

定义算子 $L: X \to Y$,有

$$Lx = x'', \qquad x \in X;$$

又定义算子 $N: X \to Y$,有

$$Nx(t) = -f(t, x(t), x(t-\tau_1(t,x(t))))x'(t) - \beta(t)g(x(t-\tau_2(t,x(t)))), \qquad x \in X,$$

则求解方程(2)的 T-周期解等价于求解算子方程,即

$$Lx = Nx + p(t) \tag{5}$$

在 X 中的解.

引理 2[8]　L 是指标为 0 的 Fredholm 算子且满足 $l(L) \ge 1$.

引理 3　设 Ω 是 x 中的任一有界子集,则 $N: \bar{\Omega} \to Y$ 是 0-集压缩算子. 证明从略.

引理 4　假设下面 5 个条件成立.

(H1) $\beta_1 = \max_{t\in[0,T]}\beta(t) \ge \beta_0 = \min_{t\in[0,T]}\beta(t) > 0$.

(H2) $\limsup_{|x|\to\infty}\left|\frac{g(x)}{x}\right| \le r$, $r \ge 0$, r 为常数.

(H3) $\liminf_{x\to+\infty} g(x) = r_1 > \frac{|p|_0}{\beta_0}$, $\limsup_{x\to-\infty} g(x) = -r_2 < -\frac{|p|_0}{\beta_0}$. 其中, r_1, r_2 可以是有限数,也可以是 $+\infty$.

(H4) 存在非负的连续 T-周期函数 $f_1(t)$,使得 $\forall (t,x,y) \in \mathbf{R}^3$ 都有 $|f(t,x,y)| \le f_1(t)$.

(H5) $r < \frac{1-\bar{f}_1 T}{\beta_1 T^2}$.

则存在常数 $C > 0$,使得算子方程

$$Lx = \lambda Nx + \lambda p(t), \qquad \lambda \in (0,1) \tag{6}$$

的任一解 $x(t) \in X$,均满足 $\|x\|_2 < C$ 这里 C 与 $\lambda \in (0,1)$ 无关.

证明　由条件(H2)可知,存在正常数 C_2 使得

$$|g(x)| \le C_1|x| + C_2, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{7}$$

其中, $C_1 = \frac{1}{2}\left[r + \frac{1-\bar{f}_1 T}{\beta_1 T^2}\right] > r$. 又由条件(H3)可知,存在正常数 A 使得

$$\left.\begin{aligned} g(x) &> \frac{|p|_0}{\beta_0}, \qquad x \ge A; \\ g(x) &< -\frac{|p|_0}{\beta_0}, \qquad x \le -A. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

假设式(6)对某一 $x(t) \in X$ 成立, 则

$$\begin{aligned} &x''(t) + \lambda f(t, x(t), x(t-\tau_1(t,x(t))))x'(t) + \\ &\lambda\beta(t)g(x(t-\tau_2(t,x(t)))) = \lambda p(t), \qquad \lambda \in (0,1). \end{aligned} \tag{9}$$

令 $x(t_1) = \max_{t\in[0,T]}x(t)$, $x(t_2) = \min_{t\in[0,T]}x(t)$. 则 $x'(t_1) = 0$, $x''(t_1) \le 0$; $x'(t_2) = 0$, $x''(t_2) \ge 0$. 于是,由式(9)可得

$$\begin{aligned} \beta(t_1)g(x(t_1 - \tau_2(t_1, x(t_1)))) - p(t_1) &\ge 0, \\ \beta(t_2)g(x(t_2 - \tau_2(t_2, x(t_2)))) - p(t_2) &\le 0. \end{aligned}$$

令 $F(t) = g(x(t-\tau_2(t,x(t)))) - p(t)$, 则 $F(t)$ 是连续 T-周期函数且 $F(t_1) \ge 0$, $F(t_2) \le 0$. 故由连续函

数的零点定理可知,存在 $t_0\in[0,T]$,使得 $F(t_0)=0$,即有

$$|g(x(t_0-\tau_2(t_0,x(t_0))))| = \frac{|p(t_0)|}{\beta(t_0)} \le \frac{|p|_0}{\beta_0}.$$

由上式及式(8)可得 $|x(t_0-\tau_2(t_0,x(t_0)))|\le A$. 再由 $x(t)$ 的周期性可知,存在 $\zeta\in[0,T]$,使得

$$|x(\zeta)| = |x(t_0-\tau_2(t_0,x(t_0)))| \le A.$$

于是, $|x(t)|\le|x(\zeta)|+\left|\int_\zeta^t x'(s)\,\mathrm{d}s\right|\le A+\int_0^T|x'(s)|\,\mathrm{d}s\le A+T|x'|_0,\ t\in[0,T]$. 即有

$$|x|_0\le A+T|x'|_0. \tag{10}$$

又由式(9)得

$$\begin{aligned}|x'(t)| &\le |x'(t_1)|+\left|\int_{t_1}^t x''(s)\,\mathrm{d}s\right|\le 0+\int_0^T|x''(s)|\,\mathrm{d}s\le\\ &\lambda\int_0^T|f(s,x(s),x(s-\tau_1(s,x(s))))|\cdot|x'(s)|\,\mathrm{d}s+\\ &\lambda\int_0^T\beta(s)|g(x(s-\tau_2(s,x(s))))|\,\mathrm{d}s+\lambda\int_0^T|p(s)|\,\mathrm{d}s\le\\ &|x'|_0\int_0^T f_1(s)\,\mathrm{d}s+\int_0^T\beta(s)[C_1|x(s-\tau_2(s,x(s)))|+C_2]\mathrm{d}s+T|p|_0\le\\ &\bar f_1 T|x'|_0+C_1\bar\beta T|x'|_0+C_2\bar\beta T+T|p|_0,\qquad t\in[0,T],\end{aligned}$$

所以,有

$$|x'|_0\le\bar f_1 T|x'|_0+C_1\bar\beta T|x|_0+C_2\bar\beta T+T|p|_0.$$

因为 $1-\bar f_1 T>0$ 及 $0<\dfrac{C_1\bar\beta T^2}{1-\bar f_1 T}<\dfrac{1-\bar f T}{\beta T^2}\cdot\dfrac{\bar\beta T^2}{1-\bar f_1 T}=1$, 故由上式及式(10)可得

$$|x|_0\le\frac{1-\bar f_1 T}{1-\bar f_1 T-C_1\bar\beta T^2}\left[A+\frac{C_2\bar\beta T^2+|p|_0T^2}{1-\bar f_1 T}\right]=:C_3, \tag{11}$$

$$|x'|_0\le\frac{C_1C_3\bar\beta T}{1-\bar f_1 T}+\frac{C_2\bar\beta T+T|p|_0}{1-\bar f_1 T}=:C_4. \tag{12}$$

现在令 $C_5=\max\{C_3,C_4\}$, $D=\{x\,|\,|x|\le C_5,\ x\in\mathbf{R}\}$. 因为函数 $f(t,x,y)y+\beta(t)g(x)$ 在闭区域 $[0,T]\times D\times D$ 上连续,故存在正常数 C_6,使得对 $\forall(t,x,y)\in[0,T]\times D\times D$,有

$$|f(t,x,y)y+\beta(t)g(x)|\le C_6.$$

从而由上式及式(9),(11),(12)可得

$$|x''|_0\le C_6+|p|_0=:C_7. \tag{13}$$

最后,令 $C=\max\{A+1,C_5+1,C_7+1\}$, 显然,正常数 C 与 $\lambda(\lambda\in(0,1))$ 无关. 于是,由式(11)～(13)可知,对于方程(6)的任一解 $x(t)\in X$,均满足 $\|x\|_2<C$.

定理 如果引理4的条件成立,则方程(2)至少存在一个 T-周期解.

证明 由本节前部分的说明可知,要证明方程(2)至少存在一个 T-周期解,等价于证明算子方程(5)在 X 中至少存在一个解 x. 因此,我们只需要证明算子方程(5)满足引理1的全部条件即可.

事实上,令 $\Omega=\{x\,|\,x\in X,\ \|x\|_2<C\}$, 于是由引理2,3可知, $N:\Omega\to Y$ 是 k-集压缩的,且 $k=0<1\le l(L)$. 由定理的条件可知引理4成立,因此引理1的条件(1)成立.

在 $Y\times X$ 上定义一个双线性泛函 $[\cdot,\cdot]:[y,x]=\int_0^T y(t)x(t)\,\mathrm{d}t,\ y\in Y,\ x\in X$; 并且定义投影算子 $N:Y\to\operatorname{coker}L$,有

$$Qy=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,\mathrm{d}t,\qquad\forall y\in Y.$$

因为 $C>A$, $|p|_0/\beta_0\ge|\bar p|/\bar\beta$ 及式(8),所以

$$g(C)-\frac{\bar p}{\bar\beta}\ge g(C)-\frac{|p|_0}{\beta_0}>0,$$

$$g(-C)-\frac{\bar p}{\bar\beta}\le g(-C)+\frac{|p|_0}{\beta_0}<0.$$

从而对于 $x \in \partial\Omega \cap \ker L$, $x = C$ 或 $x = -C$, 有

$$\begin{aligned}&[QNx + Qp, x] \cdot [QN(-x) + Qp, x] = \\ &C^2 \int_0^T (QN(x) + Qp)\,dt \cdot \int_0^T (QN(-x) + Qp)\,dt = \\ &C^2 \int_0^T [-\beta(t) g(C) + p(t)]\,dt \cdot \int_0^T [-\beta(t) g(-C) + p(t)]\,dt = \\ &C^2 T^2 [\bar{\beta} g(C) - \bar{p}] \cdot [\bar{\beta} g(-C) - \bar{p}] < 0.\end{aligned}$$

即引理 1 中的条件(2)满足,从而引理 1 中的所有条件都满足. 因此方程(5)在 X 中至少存在一个解,所以方程(2)至少存在一个 T-周期解.

由于方程(1)是方程(2)的特殊情形,则由定理得

推论　如果引理 4 的条件成立,则方程(1)至少存在一个 T-周期解.

注　显然,推论的条件比文[1]中定理 1 的条件弱得多,因此,推论改进了文[1]中的定理 1.

3　结束语

关于方程(1),(2)的周期解存在性问题,我们还有一些新结果,但由于篇幅限制,将另文发表.

参考文献:

[1] 鲁世平,葛谓高. 具有偏差变元的二阶微分方程的周期解[J]. 数学学报, 2002, 45(4): 811-818.

[2] LI Yong-kun, KUANG Y. Periodic solutions for a state-dependent delay equations and population models[J]. Proc Amer Math Soc, 2001, 130(5): 1 345-1 353.

[3] 韩　飞,王全义. 具状态依赖时滞微分方程的周期正解[J]. 华侨大学学报:自然科学版, 2005, 26(4): 357-360.

[4] 房　辉. 高阶非线性中立型微分方程的周期解[J]. 纯粹数学与应用数学, 2000, 16(2): 14-25.

[5] GAINS R E, MAWHIN J L. Coincidence degree and nonlinear differential equation[C]//Lecture Notes in Math. Berlin: Springer-Verlag, 1977: 1-100.

[6] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2002: 193-194.

[7] PETRYSHYN W V, YU Z S. Existence theorems for higher order nonlinear periodic boundary value problems[J]. Nonlinear Anal, 1982, 6(9): 943-969

[8] LIU Zhong-dong, MAO Yi-ping. Existence theorem for periodic solutions of higher order nonlinear differential equations[J]. J Math Anal Appl, 1997, 216: 481-490.

Periodic Solutions for Functional Differential Equations with State-Dependent Delay

WANG Quan-yi

(Department of Mathematics, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we study the problem on the existence of T-periodic solutions for a kind of second order functional differential equations with state-dependent delay. Some sufficient conditions for the existence of T-periodic solutions of the equations are obtained by mean of the abstract continuation theorem of k-set contractive operator and some analysis techniques. These sufficient conditions are very simply and verifiable. Our results generalize and improve the relative result of the current paper.

Keywords: functional differential equation; periodic solution; state-dependent delay; k-set contractive operator

(责任编辑: 黄仲一)