第 28 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 28　No. 2
2007 年 4 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 2007

文章编号: 1000-5013(2007)02-0208-04

给定复伸张单叶调和映照的面积偏差

黄心中

(华侨大学 数学系, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究单位圆到自身内给定复伸张函数的单叶调和映照的面积偏差性质, 得到精确的像区域面积上下限估计表达式, 改进了由 Hengartner 和 Schober 得到的相应结果.

关键词: 单叶调和映照; 复伸张; 面积偏差; 衰退性质
中图分类号: O 174.51　　文献标识码: A

1 预备知识

设 D 是复平面 C 上的单连通区域边界不止一点, 著名的 Riemann 映照定理表明: 对于 $w_0 \in D$ 存在唯一单位圆 $U=\{z \mid |z|<1\}$ 到 D 上的单叶解析映照 $\varphi(z)$, 使得 $\varphi(0)=w_0$, $\varphi'(0)>0$. 从区域面积的角度而言, 若 $D=U$, 则在 U 到自身上的单叶解析映照类中是面积保持的. 该性质对单位圆 U 上的单叶调和函数类有何变化, 受到不少学者的关注. Hengartner 和 Schober 在文[1]中研究了下列方程的解

$$\overline{f_{\bar z}} = a(z) f_z. \tag{1}$$

式中, $a(z)$ 为单位圆 U 上的解析函数, 满足 $|a(z)|<1$, 称 $a(z)$ 为 $f(z)$ 的复伸张函数.

Hengartne 和 Schober 在文[1]中证明了: 如果复伸张函数 $a(z)=e^{i\alpha}\left(\frac{z-z_0}{1-\bar z_0 z}\right)^m$, 则不存在 U 到自身上的同胚调和映照解. 并称同胚调和映照 $f(U)\subset D$, $f(U)\neq D$ 具有衰退性质; 如果 $\|a(z)\|_\infty=\sup_U|a(z)|<1$, 则衰退不会发生, 即, 仅当 $\|a(z)\|_\infty=\sup_U|a(z)|=1$ 时, 衰退才会发生. 同胚调和映照衰退性质的产生, 引起对同胚调和映照的偏差性质、几何特征、像面积估计等的研究[2-4].

设 $f(z)$ 是单位圆 $U=\{z \mid |z|<1\}$ 到自身内的单叶调和函数, 有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}, \qquad z \in U. \tag{2}$$

令

$$M_2=\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta=|a_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2),$$

用 A 表示 $f(U)$ 的面积, 则

$$A=\iint_D(|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2)dx\,dy=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(|a_n|^2-|b_n|^2).$$

文[1]证明了

定理 A　设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n}$ 是方程 $\overline{f_{\bar z}}=e^{i\alpha}z^m f_z$ 的解, α 为实数, m 为正整数. 则

$$A \leqslant \frac{1}{2}m\pi\left[M_2-|a_0|^2-|a_1|^2\frac{m^2}{(1+m)^2}\right], \tag{3}$$

其中, 等号由 $f(z)=z+e^{-i\alpha}\cdot\frac{1}{m+1}\cdot\overline{z^{m+1}}$ 所达到. 此外, 若 f 不恒为 0, 则

收稿日期: 2006-10-26
作者简介: 黄心中(1957-), 男, 教授, 主要从事函数论方向的研究. E-mail: huangxz@hqu.edu.cn.
基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(Z0511025)

$$A < \frac{1}{2}m\pi M_2 \leqslant \frac{1}{2}m\pi \|f\|_\infty^2. \tag{4}$$

由定理 A, 可得到以下推论

推论 A　对于任一实数 α, 设 $f(z)$ 是方程 $\overline{f_{\bar z}} = e^{i\alpha} z f_z$ 的单叶解, 满足条件(1) $f(U) \subset U$, 以及条件(2) $\lim_{r\to 1}|f(re^{i\theta})| = 1$, 对几乎处处的 $\theta \in [0, 2\pi]$ 成立. 则 $A \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{27}{32\pi} \approx 1.302$.

Duren 在文[5]再次提到上述关于单叶调和函数的衰退问题, 有如下猜测.

设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 是单位圆 U 到自身内的单叶调和映照, 这里 $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 为单位圆 U 上的解析函数, 满足 $\overline{f_{\bar z}(z)} = z f_z(z)$, 记 A 为 $f(U)$ 的面积, 则 $A \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}$. 极值函数由下列函数所达到

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} e^{i\eta(\theta)} \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\right] d\theta$$

式中, $\eta(\theta) = \frac{2\pi k}{3}$. 对于 $\frac{(2k-1)\pi}{3} < \theta < \frac{(2k+1)\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

本文进一步研究上述关于单位圆到自身内单叶调和映照的衰退性质, 得到该类单叶调和映照像区域面积上下限的精确估计表达式. 作为应用, 可得满足上述猜测单叶调和映照的像区域面积严格小于 $\frac{\pi}{2} - \frac{27}{32\pi}$. 此外, 我们还得到一般情况的相应结果.

2　主要结果及其证明

针对以上猜测, 我们首先证明

定理 1　设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 是单位圆 U 到自身内的单叶调和映照, $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 为单位圆 U 上的解析函数, 满足 $\overline{f_{\bar z}} = e^{i\alpha} z f_z$, α 为实数. 用 A 表示 $f(U)$ 的面积, 则

$$\frac{\pi}{2}|a_1|^2 \leqslant A \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 - |a_0|^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n)^2}|a_n|^2\right), \tag{5}$$

等号的左边由 $f_0(z) = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}e^{-i\alpha}\cdot \bar z^2$ 达到, 等号的右边由 $f_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} e^{i\eta(\theta)} \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\right] d\theta$ 达到. 这里, $\eta(\theta) = \frac{2\pi k}{3}$, 对于 $\frac{(2k-1)\pi}{3} < \theta < \frac{(2k+1)\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$. 此外, 若 $f(z)$ 还满足条件: $\lim_{r\to 1}|f(re^{i\theta})| = 1$, 对几乎处处的 $\theta \in [0, 2\pi]$ 成立, 则

$$A < \frac{\pi}{2} - \frac{27}{32\pi} \approx 1.302. \tag{6}$$

定理 1 的证明. 设 $f(z)$ 表示为

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n}, \qquad z \in U. \tag{7}$$

由条件 $\overline{f_{\bar z}} = e^{i\alpha} z f_z$, 通过比较系数, 可得到 $b_1 = 0$, $b_{n+1} = \frac{e^{i\alpha} n}{(n+1)} a_n$, $n = 1, 2, \cdots$. 令

$$M_2 = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

由于 $f(U) \subset U$, 则 $M_2 \leqslant 1$, 即

$$|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[1 + \left(\frac{n}{1+n}\right)^2\right]|a_n|^2 \leqslant 1. \tag{8}$$

另一方面, $f(U)$ 的面积 A 可表为

$$A = \iint_U (|h'(z)|^2 - |g'(z)|^2)\, dx\, dy = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}|a_n|^2,$$

由式(8), 得

$$\pi|a_0|^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+n)^2}|a_n|^2+\frac{2n}{n+1}|a_n|^2\right]\leqslant\pi.$$

从而, 有

$$\frac{\pi}{2}|a_1|^2\leqslant A\leqslant\frac{\pi}{2}\left[1-|a_0|^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n)^2}|a_n|^2\right],$$

(5)式得到了证明.

进一步, 若$f(z)$还满足条件: $\lim_{r\to 1}|f(re^{i\theta})|=1$, 对几乎处处的$\theta\in[0,2\pi]$成立. 对于$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n}$, 当$a_n=0,2,3,\cdots$, 根据式(8), 可得$|a_1|^2\leqslant\frac{4}{5}$, 故

$$A=\pi\frac{1}{2}|a_1|^2\leqslant\frac{2\pi}{5}<\frac{3\sqrt{3}}{4}. \tag{9}$$

若至少存在一个$k_0\geqslant 2$, 使得$a_{k_0}\neq 0$, 正如文[1]所证, 利用Hall不等式[3] $|a_0|^2+\frac{1}{4}|a_1|^2\geqslant\frac{27}{16\pi^2}$及式(5), 有

$$A\leqslant\frac{\pi}{2}\left[1-|a_0|^2-\frac{|a_1|^2}{4}-\frac{|a_{k_0}|^2}{(1+k_0)^2}\right]<\frac{\pi}{2}-\frac{27}{32\pi^2}. \tag{10}$$

综合式(9), (10), 式(6)得到证明.

不等式(5)达到等号的证明. 对于式(5)的左边, 容易看出, $f_0(z)=\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}e^{-i\alpha}\overline{z}^2$满足定理1的条件, 且$f_0(U)$的面积$A_0=\frac{2\pi}{9}=\frac{\pi}{2}|a_1|^2$. 对于式(5)的右边, 取函数$f_1(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}e^{i\eta(\theta)}\mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right]d\theta$这里, $\eta(\theta)=\frac{2\pi k}{3}$, 对于$\frac{(2k-1)\pi}{3}<\theta<\frac{(2k+1)\pi}{3}$, $k=0,1,2$. 由文[5]可知, $f_1(z)$把单位圆U单叶调和映照成单位圆U内以顶点为$1,\exp(i\frac{\pi}{3}),\exp(i\frac{2\pi}{3})$的正三角形区域, 满足$\overline{f_{1\bar z}}=zf_{1z}$, 且

$$f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{\pi(3n-2)}\sin\frac{\pi(3n-2)}{3}\right]z^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{\pi(3n-2)}\sin\frac{\pi(3n-2)}{3}\right]z^n}.$$

要证明式(5)右边的等号可达到等价于证明式(8)右边的等号可达到, 对于单叶调和函数$f_1(z)$, 有

$$|a_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{n}{1+n}\right)^2\right]|a_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^2\right]\frac{27}{4\pi^2(3n-2)^2}=$$

$$\frac{27}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(3n-2)^2}+\frac{1}{(3n-1)^2}\right]=\frac{27}{4\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{9}\frac{\pi^2}{6}\right)=1.$$

这就证明了式(5)是精确的不等式. 以上的证明, 我们可得以下几个有趣的级数和,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n-1)}=\frac{\sqrt{3}\pi}{9},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)^2(3n-1)^2}=\frac{4\pi^2}{27}-\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

定理1证毕.

类似定理1的证明, 我们可得到

定理2 设$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$是单位圆$U$到自身内的单叶调和映照, $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$为单位圆$U$上的解析函数, 满足$\overline{f_{\bar z}}=e^{i\alpha}z^2f_z$, α为实数. 用A表示$f(U)$的面积, 则

$$\frac{2\pi}{3}|a_1|^2\leqslant A\leqslant\pi\left(1-|a_0|^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2+n)^2}|a_n|^2\right). \tag{11}$$

等号的左边由$g_0(z)=\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}e^{i\alpha}\overline{z}^2$所达到, 等号的右边由$g_1(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}e^{i\eta(\theta)}\mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right]d\theta$所达到, 这里, $\eta(\theta)=\frac{\pi k}{2}$, 对于$\frac{(2k-1)\pi}{4}<\theta<\frac{(2k+1)\pi}{4}$, $k=0,1,2,3$. 此外, 若$f(z)$还满足条件: $\lim_{r\to 1}|f(re^{i\theta})|=1$,

对几乎处处的 $\theta\in[0, 2\pi]$ 成立, 则

$$A < \pi - \frac{3}{\pi}. \tag{12}$$

采用上述的记号, 我们还可得到

定理 3　设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n}$ 是满足方程 $\overline{f_{\bar z}}=e^{i\alpha}z^m f_z$ 且定义在单位圆 U 上的调和解. 这里, α 为实数, $m\geqslant 2$ 为正整数. 则

$$\frac{m\pi}{m+1}|a_1|^2\leqslant A\leqslant\frac{1}{2}m\pi\left[M_2-|a_0|^2-\frac{m^2}{(1+m)^2}|a_1|^2\right], \tag{13}$$

等号由 $f_3(z)=z+e^{-i\alpha}\frac{1}{m+1}\overline{z^{m+1}}$ 所达到.

定理 3 的证明. 设 $f(z)$ 表示为

$$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n},\qquad z\in U. \tag{14}$$

由条件 $\overline{f_{\bar z}}=e^{i\alpha}z^m f_z$, 通过比较系数, 可得到 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$, $b_{n+m}=\frac{e^{i\alpha}n}{n+m}a_n$, $n=1, 2, \cdots$, 则

$$M_2=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{n}{m+n}\right)^2\right]|a_n|^2,\qquad A=m\pi\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{m+n}\right)|a_n|^2.$$

类似定理 1 的证明, 可得

$$\frac{m\pi}{m+1}|a_1|^2\leqslant A\leqslant\frac{m\pi}{2}\left[M_2-|a_0|^2-\frac{m^2|a_1|^2}{(1+m)^2}\right],$$

式(13)得到了证明. 容易验算, 函数 $f_3(z)=z+e^{-i\alpha}\frac{1}{m+1}\overline{z^{m+1}}$ 满足定理 2 的条件, 且 $A=\frac{m\pi}{m+1}$ 使得式(13)成为等式.

定理 3 证毕.

参考文献:

[1] HENGARTNER W, SCHOBER G. Harmonic mappings with given dilatation[J]. J London Math Soc, 1986, 33(2): 473-483.

[2] CLUNIE J, SHEILSMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser, 1984, 9: 3-25.

[3] HALL R R. On an inequality of E. Heinz[J]. J Analyse Math, 1983, 42: 185-198.

[4] HENGARTNER W, SCHOBER G. Univalent harmonic functions[J]. Trans Amer Math Soc, 1987, 299(1): 1-31.

[5] DUREN P. Harmonic mappings in the plane[M]. London: Cambridge Univ Press, 2004. 57-135.

Area Distortion for Univalent Harmonic Mappings with Given Dilatation

HUANG Xin-zhong

(Department of Mathematics, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, area distortion properties for univalent harmonic mappings from open unit disk into itself with given dilatation is considered. Sharp forms of upper and lower bound for the image area are obtained. Our results improve the one made by Hengartner and Schober.

Keywords: univalent harmonic mappings; dilatation; area distortion; collapsing property

(责任编辑: 黄仲一)