第28卷　第2期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 28　No. 2
2007年4月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 2007

文章编号:　1000-5013(2007)02-0131-04

一种二维离散余弦变换系数快速算法

黄杏英, 黄华灿

(华侨大学 信息科学与工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要:　研究二维离散余弦变换与二维离散哈脱莱变换间的关系,基于二维哈脱莱变换算法, 提出一种计算二维离散余弦变换系数的快速算法. 该算法使二维离散余弦变换的算法复杂度大大降低, 从而大幅度提高二维余弦变换的速度.

关键词:　离散余弦变换; 离散哈脱莱变换; 复杂度; 降低; 快速

中图分类号:　TP 301.6; TN 919.8　　文献标识码:　A

变换编码已经被证明是一种有效的图像压缩方法,是迄今为止所有有损压缩国际标准的基础. K-L (Karhunen-Loeve) 变换是一种最佳变换, 它所产生的系数互不相关,即去掉空间冗余度. 同时, 变换后的能量也主要集中在少数几个变换系数上. 离散余弦变换(DCT) 是性能接近 K-L 变换的准最佳变换, 成为变换编码中使用最广泛的变换方法. DCT 变换算法基本上有两大类: 一类是 DCT 本身的递归分解算法, 它们是利用 4 类 DCT 变换之间的关系推导出来的; 另一类是利用 DCT 变换和离散傅里叶变换(DFT) 或离散哈脱莱变换(DHT) 之间的关系, 用 DFT 或 DHT 的快速算法计算 DCT[1-2]. 本文借鉴二维哈脱莱变换算法计算二维 DCT 变换系数的快速算法, 可使二维 DCT 变换的复杂度降低, 提高了二维 DCT 变换的速度.

1　二维离散余弦变换

对于二维实序列 $f(x, y)$, 二维离散余弦变换(2D DCT) 可以写成[3]

$$F(u,v) = \frac{2}{N}c(u)c(v)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right], \tag{1}$$

其逆变换(IDCT)为

$$f(x,y) = \frac{2}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} c(u)c(v)F(u,v)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right], \tag{2}$$

上两式中, $x, y = 0, 1, \dots, N-1$; 当 $u, v = 0$ 时, $c(u), c(v) = 1/\sqrt{2}$; 当 $u, v \neq 0$ 时, $c(u), c(v) = 1$. 可见, 二维离散余弦变换具有可分离特性, 即可以把二维 DCT 分解成行方向一维 DCT 计算和列方向一维 DCT 计算的组合运算.

首先, 对 $f(x, y)$ 行方向做一维 DCT 计算, 有 $G(u, y) = \sqrt{\frac{2}{N}}c(u) \cdot \sum_{x=0}^{N-1} f(x,y)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]$, 再对 $G(u, y)$ 做列方向做一维 DCT 计算, 得 $F(u, v) = \sqrt{\frac{2}{N}}c(v) \cdot \sum_{y=0}^{N-1} G(u,y)\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$.

2　二维离散哈脱莱变换

离散哈脱莱变换是一种正交变换, 它和离散傅里叶变换之间有着密切关系, 且具有正反变换核相同

收稿日期:　2006-06-20

作者简介:　黄杏英(1979-), 女, 硕士研究生, 主要从事数字视频处理与传输的研究; 通信作者: 黄华灿(1948-), 男, 教授, E-mail: hchuangqz@yahoo.com.cn

的优点,已被广泛应用于信号处理和图像处理中. 二维离散哈脱莱变换(2DDHT)的一种定义为

$$H(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\operatorname{cas}\left[\frac{2\pi(xu+yv)}{N}\right],\qquad u,v=0,1,\cdots,N-1,\tag{3}$$

其逆变换(IDHT)为

$$f(x,y)=\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}H(u,v)\operatorname{cas}\left[\frac{2\pi(xu+yv)}{N}\right],\qquad u,v=0,1,\cdots,N-1.\tag{4}$$

在式(3),(4)中,变换核 $\operatorname{cas}\left[\frac{2\pi}{N}(xu+yv)\right]=\cos\left[\frac{2\pi}{N}(xu+yv)\right]+\sin\left[\frac{2\pi}{N}(xu+yv)\right]$.

3 计算二维离散余弦变换的快速算法

为了简单起见,以后将略去标量因子,则实序列 $f(x,y)$ 的2DDCT可以写为

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left[\frac{v\pi(2x+1)}{2N}\right]\cos\left[\frac{v\pi(2y+1)}{2N}\right],\qquad u,v=0,1,\cdots,N-1.\tag{5}$$

设 $g(x,y)=f(2x,2y)$, $x,y=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$. 则式(5)可写为

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}g(x,y)\cos\left[\frac{\pi u(4x+1)}{2N}\right]\cos\left[\frac{\pi v(4y+1)}{2N}\right],\tag{6}$$

$$\cos\left[\frac{\pi u(4x+1)}{2N}\right]\cos\left[\frac{\pi v(4y+1)}{2N}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left\{\cos\left[\frac{2\pi(xu+yv)}{N}\right]\cos\left[\frac{\pi(u+v)}{2N}\right]-\sin\left[\frac{2\pi(xu+yv)}{N}\right]\sin\left[\frac{\pi(u+v)}{2N}\right]+\right.$$

$$\left.\cos\left[\frac{2\pi[xu+y(N-v)]}{N}\right]\cos\left[\frac{\pi(u-v)}{2N}\right]-\sin\left[\frac{2\pi[xu+y(N-v)]}{N}\right]\sin\left[\frac{\pi(u-v)}{2N}\right]\right\}.\tag{7}$$

由式(6)和(7)可得

$$F(u,v)=\frac{1}{2}\left\{\cos\left[\frac{\pi(u+v)}{2N}\right]\cos[\mathrm{DFT}(u,v)]-\sin\left[\frac{\pi(u+v)}{2N}\right]\sin[\mathrm{DFT}(u,v)]+\right.$$

$$\left.\cos\left[\frac{\pi(u-v)}{2N}\right]\cos[\mathrm{DFT}(u,N-v)]-\sin\left[\frac{\pi(u-v)}{2N}\right]\sin[\mathrm{DFT}(u,N-v)]\right\}.\tag{8}$$

式中, $\cos[\mathrm{DFT}(u,v)]=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}g(x,y)\cos\left[\frac{2\pi(ux+vy)}{N}\right]$, $\sin[\mathrm{DFT}(u,v)]=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}g(x,y)\cdot\sin\left[\frac{2\pi(ux+vy)}{N}\right]$. 他们分别称作 $g(x,y)$ 的余弦离散傅里叶变换和正弦离散傅里叶变换,可以用2DDHT表示,即可转化为 $H(u,v)$ 及其移位来表示. 具体计算为

$$\cos[\mathrm{DFT}(u,v)]=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}g(x,y)\cos\left[\frac{2\pi}{N}(ux+vy)\right]=\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}g(x,y)\left\{\cos\left[\frac{2\pi}{N}(ux+vy)\right]+\right.$$

$$\left.\sin\left[\frac{2\pi}{N}(ux+vy)\right]+\cos\left[\frac{2\pi}{N}[N(x+y)-(ux+vy)]\right]+\sin\left[\frac{2\pi}{N}[N(x+y)-(ux+vy)]\right]\right\}=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}g(x,y)\left\{\operatorname{cas}\left[\frac{2\pi}{N}(ux+vy)\right]+\cos\left[\frac{2\pi}{N}[(N-u)x+(N-v)y]\right]+\right.$$

$$\left.\sin\left[\frac{2\pi}{N}[(N-u)x+(N-v)y]\right]\right\}=\frac{1}{2}[H(u,v)+H(N-u,N-v)].\tag{9}$$

同理可得 $\sin[\mathrm{DFT}(u,v)]=\frac{1}{2}[H(u,v)-H(N-u,N-v)]$. 由上式及式(9)可知,式(8)为

$$F(u,v)=\frac{1}{4}\left\{H(u,v)\operatorname{cms}\left[\frac{\pi(u+v)}{2N}\right]+H(N-u,N-v)\operatorname{cas}\left[\frac{\pi(u+v)}{2N}\right]+\right.$$

$$\left.H(u,N-v)\operatorname{cms}\left[\frac{\pi(u-v)}{2N}\right]+H(N-u,v)\operatorname{cas}\left[\frac{\pi(u-v)}{2N}\right]\right\}.\tag{10}$$

式中, $\operatorname{cas}\left[\frac{\pi(u+v)}{2N}\right]=\cos\left[\frac{\pi(u+v)}{2N}\right]+\sin\left[\frac{\pi(u+v)}{2N}\right]$, $\operatorname{cms}\left[\frac{\pi(u+v)}{2N}\right]=\cos\left[\frac{\pi(u+v)}{2N}\right]-\sin\left[\frac{\pi(u+v)}{2N}\right]$.

由于 $\operatorname{cas}\left[\frac{\pi[(N-u)+v]}{2N}\right]=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi(u-v)}{2N}\right]+\sin\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi(u-v)}{2N}\right]=\sin\left[\frac{\pi(u-v)}{2N}\right]+\cos\left[\frac{\pi(u-v)}{2N}\right]=$

$\mathrm{cas}[\frac{\pi(u-v)}{2N}]$. 同理, 也可以得到

$$\mathrm{cas}[\frac{\pi[u+(N-v)]}{2N}] = \mathrm{cms}[\frac{\pi(u-v)}{2N}],\ \mathrm{cas}[\frac{\pi[(N-u)+(N-v)]}{2N}] = -\mathrm{cms}[\frac{\pi(u+v)}{2N}],$$

$$\mathrm{cms}[\frac{\pi[(N-u)+v]}{2N}] = -\mathrm{cms}[\frac{\pi(u-v)}{2N}],\ \mathrm{cms}[\frac{\pi[u+(N-v)]}{2N}] = -\mathrm{cas}[\frac{\pi(u-v)}{2N}],$$

$$\mathrm{cms}[\frac{\pi[(N-u)+(N-v)]}{2N}] = -\mathrm{cas}[\frac{\pi(u+v)}{2N}],\ \mathrm{cas}[\frac{\pi[(N-u)-v]}{2N}] = \mathrm{cas}[\frac{\pi(u+v)}{2N}],$$

$$\mathrm{cas}[\frac{\pi[u-(N-v)]}{2N}] = -\mathrm{cms}[\frac{\pi(u+v)}{2N}],\ \mathrm{cas}[\frac{\pi[(N-u)-(N-v)]}{2N}] = \mathrm{cms}[\frac{\pi(u-v)}{2N}],$$

$$\mathrm{cms}[\frac{\pi[(N-u)-v]}{2N}] = -\mathrm{cms}[\frac{\pi(u+v)}{2N}],\ \mathrm{cms}[\frac{\pi[u-(N-v)]}{2N}] = \mathrm{cas}[\frac{\pi(u+v)}{2N}],$$

$$\mathrm{cms}[\frac{\pi[(N-u)-(N-v)]}{2N}] = \mathrm{cas}[\frac{\pi(u-v)}{2N}].$$

利用式(10)及上面的式子, 可得

$$F(N-u,N-v) = \frac{1}{4}\{-H(u,v)\mathrm{cms}[\frac{\pi(u+v)}{2N}] - H(N-u,N-v)\mathrm{cas}[\frac{\pi(u+v)}{2N}] + H(u,N-v)\mathrm{cms}[\frac{\pi(u-v)}{2N}] + H(N-u,v)\mathrm{cas}[\frac{\pi(u-v)}{2N}]\}, \tag{11}$$

$$F(N-u,v) = \frac{1}{4}\{H(u,v)\mathrm{cas}[\frac{\pi(u+v)}{2N}] - H(N-u,N-v)\mathrm{cms}[\frac{\pi(u+v)}{2N}] + H(u,N-v)\mathrm{cas}[\frac{\pi(u-v)}{2N}] - H(N-u,v)\mathrm{cms}[\frac{\pi(u-v)}{2N}]\}, \tag{12}$$

$$F(u,N-v) = \frac{1}{4}\{H(u,v)\mathrm{cas}[\frac{\pi(u+v)}{2N}] - H(N-u,N-v)\mathrm{cms}[\frac{\pi(u+v)}{2N}] - H(u,N-v)\mathrm{cas}[\frac{\pi(u-v)}{2N}] + H(N-u,v)\mathrm{cms}[\frac{\pi(u-v)}{2N}]\}. \tag{13}$$

从式(10)和式(11)~(13)可知, 二维实序列 $f(x,y)$ 的点 $f(x,y)$, $f(N-x,y)$, $f(x,N-y)$ 和 $f(N-x,N-y)$ 的 DCT 变换系数可由这 4 点的 DHT 变换求得. 这 4 点是关于轴 $x=\frac{N}{2}$ 和 $y=\frac{N}{2}$ 轴对称的, 如图 1 所示. 得到实序列 $f(x,y)$ 的点 (x,y) 的离散哈脱莱变换 $H(u,v)$ 后, 通过移位可得到 $H(N-u,v)$,

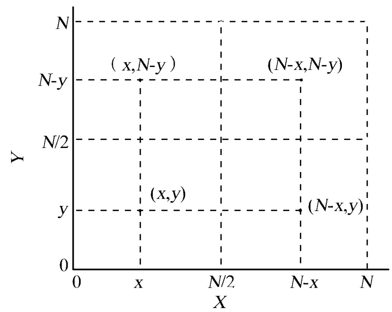

图 1　实序列的点之间对称

Fig. 1　The symmetry of the real sequeace

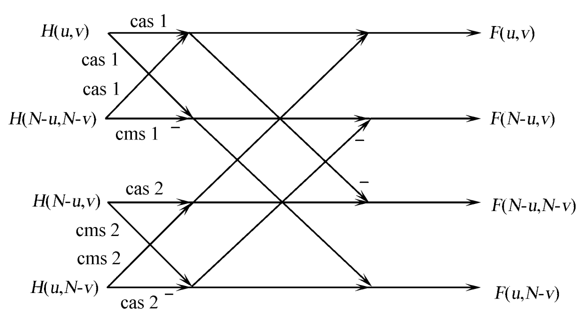

图 2　用 2DDHT 计算 2DDCT 流图

Fig. 2　The figure of calculation 2DDCT by 2DDHT

$H(u,N-v)$ 和 $H(N-u,N-v)$, 再利用图 2 的算法流图, 可得到 4 点对应的离散余弦变换系数.

4　计算复杂性比较

1986 年, Kumaresan 等提出了式(3)的矢量基算法, 使得实数乘和实数加的次数大大减少. 其中, 实数乘法的次数 $M_s(N\times N)=(3/2)N^2\log_2 N$, 实数加法和移位的次数 $A_s(N\times N)=2N^2\log_2 N$. 文[4]中提出了一种新的分离矢量基 2DDHT 算法, 其算法复杂性是

$$M(N\times N) = 3M_s(\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}) + 4M_s(\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}) + 6(\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}) = \frac{3N^2}{2}\log_2 N - \frac{3N^2}{8}, \tag{14}$$

$$A(N \times N) = A_s(\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}) + 12A_s(\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}) + \frac{3N^2}{4} + \frac{57N^2}{8} = 2N^2\log_2 N + \frac{33N^2}{8}. \quad (15)$$

本文借助这种算法计算 2DDHT. 由于每个点(x,y)是以中心对称的, 计算得到其对应的离散哈脱莱变换$H(u,v)$后, 还需要再做两次乘法和加法运算, 另外还有一次移位. 因此, 可以得到本文 2DDCT 的算法复杂性为

$$M[\mathrm{DCT}(N \times N)] = M(N \times N) + 2(\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}) = \frac{3N^2}{2}\log_2 N + \frac{N^2}{8}, \quad (16)$$

$$A[\mathrm{DCT}(N \times N)] = A(N \times N) + 2(\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}) + (\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}) = 2N^2\log_2 N + \frac{39N^2}{8}. \quad (17)$$

文[5]中借助快速多项式变换(FPT)及快速傅里叶变换(FFT), 提出了 2DDCT 的一种新的混合算法. 与通用的递推减半法、FFT 法相比, 其运算量减少约 40%, 其算法复杂性为

$$M = \frac{3}{4}N^2\log_2 N + \frac{11}{2}N^2 - 14N + 6, \qquad A = \frac{7}{2}N^2\log_2 N + 5N^2 - 11N + 6. \quad (18)$$

2DDCT 的 3 种算法复杂性比较, 如表 1 所示. 表中, 行列分离算法是运用 2DDCT 可分离特性得到的.

表1 2DDCT 算法复杂性比较

Tab. 1 2DDCT′s complexity comparison

N	行列分离算法		混合算法		本文算法	
	M	A	M	A	M	A
8	4 096	4 032	390	910	296	616
16	65 536	65 280	1 958	4 694	1 568	2 672
32	1 048 576	1 047 552	9 030	22 694	7 808	15 232
64	1 677 216	16 773 120	40 070	105 798	37 376	69 120

5 结束语

数据压缩技术可解决数字化信息对存储器、通信信道和计算机速度带来的巨大压力, 变换编码是数据压缩有效的方法. 本文提出的计算二维离散余弦变换的快速算法, 降低了算法复杂度, 提高变换的速度, 结果令人满意.

参考文献:

[1] WANG Zhong-de. Fast algorithms for the discrete W transform and for the discrete Fourier transform[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1984, 32(4): 803-816.

[2] 茅一民. 二维 DCT 的一种新算法[J]. 通信学报, 1994, 15(4): 93-97.

[3] 刘富强. 数字视频信息处理与传输教程[M]. 北京: 机械工业出版社, 2004: 57-59.

[4] 茅一民. 分离矢量基二维哈脱莱变换算法[J]. 数据采集与处理, 1989, 4(2): 1-6

[5] 余品能. 二维离散余弦变换的 FFT 及 FPT 混合算法[J]. 石油地球物理勘探, 1994, 29(4): 468-473.

A Fast Algorithm for Two Dimension Discrete Cosine Transform

HUANG Xing-ying, HUANG Hua-can

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: This paper studies the relation between the discrete cosine transform (DCT) and the discrete hartley transform (DHT). A fast algorithm to calculate the coefficient on two dimension discrete cosine transform (2DDCT) is proposed based on the algorithm of DHT. The new algorithm reduces the complexity of the 2DDCT, and sharply enhances its velocity.

Keywords: discrete cosine transform; discrete hartley transform; complexity; reduce; fast

(责任编辑: 黄仲一)