第 28 卷 第 1 期　　华侨大学学报 (自然科学版)　　Vol. 28 No. 1
2007 年 1 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jan. 2007

文章编号: 1000-5013(2007) 01-0111-02

关于捕食者-食饵系统正周期解存在性的一个反例

王 全义

(华侨大学 数学系, 福建 泉州 362021)

摘要: 举出一个具有时滞和功能反应的两种群捕食者-食饵扩散系统的反例,并证明该系统不存在正的 ω-周期解. 这个反例说明了, 2003 年 LI Bin-wen 在《Ann. of Diff. Eqs.》上得出的结论是错误的.

关键词: 捕食者-食饵扩散系统; 时滞; 功能反应; 正周期解; 存在性

中图分类号: O 175.1　　文献标识码: A

1 问题的提出

对于两种群 Lotka-Volterra 型捕食-被捕食模型的正周期解的存在性问题, 已有许多的研究成果[1-2], 其中均假定捕食者种群的平均捕食率只依赖于食饵种群的密度. 近年来的研究表明, 在许多情形下, 特别是当捕食者不得不搜寻食物(因此不得不分享或竞争食物) 时, 一个更切合实际且更一般的捕食-被捕食模型应基于"比率依赖"理论[3-4]. 即捕食者种群的平均增长率应为食饵种群密度之比的函数. 此外, 注意到在种群的生态环境中, 扩散是经常发生的, 也就是说, 种群能够在两个路径中扩散.

最近, 文[5]研究了具有时滞和比率且具有功能反应的捕食者-食饵扩散系统

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t)\Big(a_1(t) - a_{11}(t)x_1(t) - \frac{a_{13}(t)x_3(t)}{m(t)x_3(t) + x_1(t)}\Big) + D_1(t)(x_2(t) - x_1(t)),\\ x_2'(t) &= x_2(t)(a_2(t) - a_{22}(t)x_2(t)) + D_2(t)(x_1(t) - x_2(t)),\\ x_3'(t) &= x_3(t)\Big(-a_3(t) - a_{33}(t)x_3(t) + \frac{a_{31}(t)x_1(t-\tau)}{m(t)x_3(t-\tau) + x_1(t-\tau)}\Big) \end{aligned}\right\}\tag{1}$$

的正的 ω-周期解存在性问题. 其中, $a_i(t)$, $a_{ii}(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, $a_{13}(t)$, $a_{31}(t)$, $D_i(t)$ $(i = 1, 2)$ 和 $m(t)$ 均是 t 的严格的正的连续的 ω-周期函数, $\omega > 0$; $x_i(t)$ 表示 t 时刻在第 i 个斑块的食饵密度, $i = 1, 2$; $x_3(t)$ 表示 t 时刻捕食者密度; $\tau > 0$ 是常数时滞; $D_i(t)$ 表示 t 时刻食饵在第 i 个斑块的扩散系数, $i = 1, 2$.

若 $f(t)$ 是 t 的连续的 ω-周期函数, 则记

$$f^M = \max_{0\leqslant t\leqslant\omega} |f(t)|,\qquad f^L = \min_{0\leqslant t\leqslant\omega} |f(t)|,\qquad \bar{f} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

文[5]利用重合度理论中的延拓定理, 得到如下主要结果. 即假设(i) $(a_1 - D_1)^L > a_{13}^M / m^L$, (ii) $a_{31}^M > \overline{a_3}$, (iii) $a_2(t) > D_2(t)$ 成立, 则系统(1) 至少存在一个正的 ω-周期解. 我们认为, 该定理的结论是不成立的.

2 一个反例

考虑如下的具有时滞和功能反应的两种群捕食者-食饵扩散系统

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t)\Big[3 - x_1(t) - \frac{x_3(t)}{x_3(t) + x_1(t)}\Big] + (x_2(t) - x_1(t)),\\ x_2'(t) &= x_2(t)[4 - 3x_2(t)] + 2[x_1(t) - x_2(t)],\\ x_3'(t) &= x_3(t)\{-1 - 2x_3(t) + [(|\sin t| + 1/10)x_1(t-1)]/[x_3(t-1) + x_1(t-1)]\}. \end{aligned}\right\}\tag{2}$$

收稿日期: 2006-03-28

作者简介: 王全义(1955-) , 男, 教授, 主要从事常微分方程及泛函微分的研究. E-mail: qywang@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(Z0511026)

对照系统(1),这里,$a_1(t)=3$, $a_2(t)=4$, $a_3(t)=1$, $a_{11}(t)=1$, $a_{22}(t)=3$, $a_{33}(t)=2$, $a_{13}(t)=1$, $m(t)=1$, $D_1(t)=1$, $D_2(t)=2$, $a_{31}(t)=|\sin t|+1/10$, $\tau=1$. 显然,系统(2)是周期为π的周期系统. 因为$\overline{a_3}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}t=1$,所以,$a_{31}^M=1+1/10=11/10>\overline{a_3}$,又因为$(a_1-D_1)^L=2>a_{13}^M/m^L=1$, $a_2(t)=3>D_2(t)=2$. 所以,系统(2)满足定理1[5]的所有条件. 因此,由定理1[5]可知,系统(2)至少存在一个正的π-周期解. 但是,这个结论是错误的,因为我们有如下定理.

定理 系统(2)不存在正的π-周期解.

证明 反证法. 设系统(2)存在一个正的π-周期解$(x_1^*(t), x_2^*(t), x_3^*(t))$. 令$u_1^*(t)=\ln x_1^*(t)$, $u_2^*(t)=\ln x_2^*(t)$, $u_3^*(t)=\ln x_3^*(t)$,代入式(2),可得

$$\left.\begin{aligned} u_1^{*\prime}(t) &= 3-\mathrm{e}^{u_1^*(t)}-\mathrm{e}^{u_3^*(t)}/(\mathrm{e}^{u_3^*(t)}+\mathrm{e}^{u_1^*(t)})+(\mathrm{e}^{u_2^*(t)-u_1^*(t)}-1),\\ u_2^{*\prime}(t) &= 4-3\mathrm{e}^{u_2^*(t)}+2[\mathrm{e}^{u_1^*(t)-u_2^*(t)}-1],\\ u_3^{*\prime}(t) &= -1-2\mathrm{e}^{u_3^*(t)}+[(|\sin t|+1/10)\mathrm{e}^{u_1^*(t-1)}]/[\mathrm{e}^{u_3^*(t-1)}+\mathrm{e}^{u_1^*(t-1)}].\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

注意到$u_i^*(t)(i=1,2,3)$是连续的π-周期函数,因此将系统(3)的第3式两边从0积分到π可得

$$-\pi-2\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{u_3^*(t)}\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\frac{(|\sin t|+1/10)\mathrm{e}^{u_1^*(t-1)}}{\mathrm{e}^{u_3^*(t-1)}+\mathrm{e}^{u_1^*(t-1)}}\mathrm{d}t=0.$$

即有 $$\pi<\pi+2\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{u_3^*(t)}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{(|\sin t|+1/10)\mathrm{e}^{u_1^*(t-1)}}{\mathrm{e}^{u_3^*(t-1)}+\mathrm{e}^{u_1^*(t-1)}}\mathrm{d}t<\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t+\frac{\pi}{10}=2+\frac{\pi}{10}<3.$$

这就发生了矛盾,说明系统(2)不存在正的π-周期解. 定理证毕.

3 结束语

由定理可知,文[5]中的主要结论是错误的. 事实上,从文[5]中也可看出其证明是不成立的. 至于有关具有时滞和功能反应的两种群捕食者-食饵扩散系统(1)的正ω-周期解问题,我们也得到了一些新结果,由于篇幅较长,将另文阐述.

参考文献:

[1] 董士杰,葛渭高. 一类滞后型非自治的捕食者-食饵系统的周期解[J]. 系统科学与数学,2003,23(4):461-464.

[2] 范 猛,王 克. 一类具有Holling II型功能性反应的捕食者-食饵系统全局周期解的存在性[J]. 数学物理学报,2001,21A(4):492-497.

[3] XU Rui, CHEN Lan-sun. Persistence and stability of two-species ratio-dependent predator-prey system with delay in a two-patch environment[J]. Computers Math Applic, 2000, 40: 577-588.

[4] 张正球,王志成. 基于比率的三种群捕食者-食饵扩散系统的周期解[J]. 数学学报,2004,47(3):531-540.

[5] Li Bi-wen. Positive periodic solution for two-species predator-prey diffusion-delay models with functional response [J]. Ann Diff Eqs, 2003, 19(2): 146-153.

A Counterexample on the Existence of Positive Periodic Solutions for Two-Species Predator-Prey Diffusive Systems

WANG Quan-yi

(Department of Mathematics, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we give a counterexample on two-species predator-prey Diffusive systems with time delay and functional response and prove that the system does not exist positive-periodic solutions. This counterexample indicates that the result of the paper appeared in《Annals of Differential Equations》(2003) is incorrect.

Keywords: time delay; functional response; predator-prey diffusive systems; positive periodic solution; existence

(责任编辑: 黄仲一)