

文章编号: 1000-5013( 2007)01-0092-04

# “Good” Boussinesq 方程的多辛 Fourier 拟谱算法

黄浪扬

( 华侨大学 数学系, 福建 泉州 362021 )

摘要: 对满足周期边界条件的非线性“good” Boussinesq 方程作正则变换, 得到它的一个多辛方程组及其守恒律. 在空间方向用 Fourier 拟谱方法离散此方程组, 然后在时间方向用中点辛格式对半离散方程进行数值求解, 得到了非线性“good” Boussinesq 方程的多辛 Fourier 拟谱格式. 同时也得到格式的半离散及全离散多辛守恒律. 数值实验能很好地模拟原孤立波的运动, 验证了所构造格式的有效性与长时间的数值稳定性.

关键词: 多辛方程组; Fourier 拟谱格式; 非线性“good” Boussinesq 方程; 数值实验

中图分类号: O 241.82

文献标识码: A

谱方法以其指数阶精度和良好的稳定性得到了广泛的研究和应用, 但保结构谱方法方面的研究却相对很少. 近年来, 自 Bridges 与 Reich 提出了多辛积分的概念并发展了多辛算法<sup>[13]</sup>后, 在多辛 Hamilton 系统上又提出了多辛 Fourier 谱方法<sup>[4]</sup>, 随后一些学者应用多辛 Fourier 谱方法和多辛 Fourier 拟谱方法对一些具体问题进行了数值计算<sup>[5-6]</sup>. 在文[ 7] 中, 对满足周期边界条件的非线性“good” Boussinesq 方程已经构造了 1 个 15 点多辛 Preissmann 格式, 本文进一步研究此方程的多辛 Fourier 拟谱方法, 同时导出离散多辛守恒律. 另外, 本文以求非线性“good” Boussinesq 方程的孤立波解作为数值试验的算例, 并与文[ 7] 中的 15 点多辛 Preissmann 格式做数值比较, 验证了本文所构造的多辛拟谱格式的可靠性及优越性.

## 1 多辛方程组及其守恒律

考虑满足周期边界条件的非线性“good” Boussinesq 方程

$$u_t = - u_{xxx} + u_x + (u^2)_{xx}, \tag{1}$$

它是表征向两个方向传播的非线性浅水波的一个例子. 根据由 Bridges 和 Reich 引入的多辛积分的概念<sup>[13]</sup>, 对方程(1) 引入正则动量  $v = u_x, u_t = p_x, w_x = p$ , 可改写成多辛方程组为

$$Mz_t + Kz_x = \nabla_z S(z), \quad z \in \mathbf{R}^4, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2. \tag{2}$$

式(2) 中, Hamilton 函数  $S(z) = \frac{1}{2}(u^2 - v^2 - p^2) + \frac{1}{3}u^3$ ,  $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$z = (u, v, w, q)^T$ . 多辛方程组(2) 具有重要的多辛守恒律, 有

$$\frac{\partial}{\partial t}(du \wedge dw) + \frac{\partial}{\partial x}(du \wedge dv + dw \wedge dp) = 0. \tag{3}$$

## 2 多辛 Fourier 拟谱离散

多辛方程组(2) 的分量形式为

收稿日期: 2006-07-19

作者简介: 黄浪扬(1974-), 男, 讲师, 主要从事偏微分方程数值解法的研究. E-mail: hly6@163.com.

基金项目: 福建省自然科学基金计划资助项目(Z0511029)

$$w_t + v_x = u + u^2, \quad -u_x = -v, \quad -u_t + p_x = 0, \quad -w_x = -p. \quad (4)$$

在对式(4)应用 Fourier 拟谱方法离散之前, 先简单介绍 Fourier 拟谱方法的有关知识<sup>[46]</sup>. 假设  $z(x, t)$  是以  $L$  为周期的光滑函数,  $z(x, t)$  在配置点  $(x_j = \frac{L}{N}j, j = 0, 1, \dots, N-1, \text{ 其中 } N \text{ 为偶数})$  处的插值近似用  $I_N z(x, t)$  表示, 且具如下形式

$$I_N z(x, t) = \sum_{j=0}^{N-1} z_j \left( \frac{1}{N} \sum_{l=-N/2}^{N/2} \frac{1}{c_l} e^{i\mu_l(x-x_j)} \right) = \sum_{l=-N/2}^{N/2} \left( \frac{1}{N} \sum_{c_l j=0}^{N-1} z_j e^{-i\mu_l j} \right) e^{i\mu_l x}. \quad (5)$$

其中,  $z_j = z(x_j, t)$ ,  $c_l = 1 (|l| \neq \frac{N}{2})$ ,  $c_{-\frac{N}{2}} = c_{\frac{N}{2}} = 2$ ,  $\mu = \frac{2\pi}{L}$ . 若记  $g_j(x) = \frac{1}{N} \sum_{l=-N/2}^{N/2} \frac{1}{c_l} e^{i\mu_l(x-x_j)}$ , 则  $g_j(x_k) = \delta_{jk}$ . 从而有  $I_N z(x_j, t) = z_j, j = 0, 1, \dots, N-1$ .

为了得到关于  $z_j$  的方程, 将式(5)代入多辛方程组(2), 并要求方程组(2)在配置点精确成立, 即

$$[M(I_N z(x, t))_t + K(I_N z(x, t))_x] |_{x=x_j} = \nabla_x S(z_j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6)$$

这里, 关键是用  $z_j$  来表示偏导数  $\partial^k I_N z(x, t) / \partial x^k$  在配置点  $x_j$  处的值. 为解决此问题, 对式(5)求微分, 并计算它在点  $x_j$  处的值, 得

$$\frac{\partial^k I_N z(x, t)}{\partial x^k} = \sum_{n=0}^{N-1} z_n \frac{d^k g_n(x_j)}{dx^k} = (D_k z)_j,$$

其中  $z = (z_0, \dots, z_{N-1})^T$ ,  $D_k$  为一个  $N \times N$  矩阵, 我们称之为  $k$  阶谱微分矩阵, 即

$$(D_k)_{j,n} = \frac{d^k g_n(x_j)}{dx^k}, \quad (7)$$

通过计算, 可以得到

$$(D_1)_{j,n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu (-1)^{j+n} \cot(\mu \frac{x_j - x_n}{2}), & j \neq n, \\ 0, & j = n. \end{cases} \quad (8)$$

现对多辛方程组(4)在时间方向不离散, 在空间方向上用 Fourier 拟谱方法进行离散, 则利用谱微分矩阵, 可得非线性“good” Boussinesq 方程的 Fourier 拟谱半离散格式, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} w_j + (D_1 v)_j &= u_j + (u_j)^2, & -(D_1 u)_j &= -v_j, & j &= 0, 1, \dots, N-1. \\ -\frac{d}{dt} u_j + (D_1 p)_j &= 0, & -(D_1 w)_j &= -p_j, & j &= 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(9)中,  $u = (u_0, \dots, u_{N-1})^T$ ,  $v = (v_0, \dots, v_{N-1})^T$ ,  $w = (w_0, \dots, w_{N-1})^T$ ,  $p = (p_0, \dots, p_{N-1})^T$ .

**定理 1** Fourier 拟谱半离散格式(9)具有  $N$  个半离散的多辛守恒律, 即

$$\frac{d}{dt} \omega_j + \sum_{k=0}^{N-1} (D_1)_{j,k} K_k = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (10)$$

其中,  $z_j = (u_j, v_j, w_j, p_j)^T$ ;  $M$  和  $K$  是式(2)中的反对称矩阵;  $\omega_j = \frac{1}{2} (dz_j \wedge M dz_j)$ ,  $K_k = dz_k \wedge K dz_k$ .

**证明** 把格式(9)写成紧的形式, 有

$$M \frac{d}{dt} z_j + K \sum_{k=0}^{N-1} (D_1)_{j,k} z_k = \nabla_z S(z_j). \quad (11)$$

与(11)相联系的变分方程为

$$M \frac{d}{dt} dz_j + K \sum_{k=0}^{N-1} (D_1)_{j,k} dz_k = S_{zz}(z_j) dz_j. \quad (12)$$

用  $dz_j$  对式(12)两边同时作外积, 并注意到等式

$$\left( \frac{d}{dt} dz_j \right) \wedge M dz_j = dz_j \wedge M \left( \frac{d}{dt} dz_j \right), \quad dz_j \wedge S_{zz}(z_j) dz_j = 0,$$

便得到了  $N$  个半离散的多辛守恒律(10). 证毕

现在, 在时间方向再用中点格式对 Fourier 拟谱半离散格式(9)进行离散, 得到非线性“good” Boussinesq 方程的多辛 Fourier 拟谱离散格式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{w_j^{n+1}-w_j^n}{\Delta t}+(D_1 v^{n+\frac{1}{2}})_j &= u_j^{n+\frac{1}{2}}+(u_j^{n+\frac{1}{2}})^2, & -(D_1 u^{n+\frac{1}{2}})_j &= -v_j^{n+\frac{1}{2}}, \\ -\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+(D_1 p^{n+\frac{1}{2}})_j &= 0, & -(D_1 w^{n+\frac{1}{2}})_j &= -p_j^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

式(13)中,  $\Delta t$  为时间步长,  $u^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(u^n+u^{n+1})$ ,  $w^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(w^n+u_j^{n+1})$ ,  $\cdots; j=0,1,\cdots,N-1$ .

定理 2 多辛 Fourier 拟谱格式(13)具有  $N$  个全离散的多辛守恒律, 有

$$\frac{\omega_j^{n+1}-\omega_j^n}{\Delta t}+\sum_{k=0}^{N-1}(D_1)_{j,k}k_j^{\frac{n+1}{2}}=0. \tag{14}$$

式(14)中,  $\omega_j^n=\frac{1}{2}dz^n\wedge Mdz^n$ ,  $k_{j,k}^{\frac{n+1}{2}}=dz_j^{n+\frac{1}{2}}\wedge Kdz_k^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $j=0,1,\cdots,N-1$ .

此定理可类似于定理 1 得到证明. 由于在实际数值计算中我们需要计算辅助变量  $v, w, p$ , 这样就大大增加了计算量. 因此, 将多辛 Fourier 拟谱格式(13)消去中间变量  $v, w, p$ , 得到其等价格式为

$$Au^{n+1}=Bu^n-Au^{n+1}+\frac{(\Delta t)^2}{2}D_1[(u^{n+\frac{1}{2}})^2+(u^{n-\frac{1}{2}})^2]. \tag{15}$$

式(15)中,  $A=I_N+\frac{(\Delta t)^2}{4}(D_1)^4-\frac{(\Delta t)^2}{4}(D_1)^2$ ,  $B=2I_N-\frac{(\Delta t)^2}{2}(D_1)^4+\frac{(\Delta t)^2}{2}(D_1)^2$ ,  $I_N$  为  $N$  阶单位矩阵,  $u=(u_0,\cdots,u_{N-1})^T$ ,  $D_1$  为由式(8)所得到的  $N$  阶反对称矩阵.

3 数值实验

对非线性“good” Boussinesq 方程(1), 用本文的多辛 Fourier 拟谱格式(15)及文[7]中的 15 点多辛 Preissmann 格式进行数值模拟比较. 并给出模拟结果. 方程(1)的精确孤立波解为

$$u(x,t)=-A\operatorname{sech}^2[(P/2)(\zeta-\zeta_0)], \quad \zeta=x-\alpha. \tag{16}$$

我们只在有限区间( $X_L, X_R$ )上进行数值模拟, 且对人工边界  $X_L$  和  $X_R$  取得足够远, 以满足周期边界条件. 为简便起见, 对 3 层格式中的初始层  $U^0$  及第 1 层  $U^1$  均用精确值进行计算.

首先考虑单孤立子的传播. 在式(16)中, 取振幅  $A=0.5$ , 初相  $\zeta_0=0$ , 且  $X_L=-50, X_R=50$ , 时间步长为  $\Delta t=0.125$ , 空间步长为  $\Delta x=0.5$ . 计算 10 000 步后, 我们发现格式(15)模拟孤立子运动的结果很好, 不出现振荡现象. 图 1 给出了格式(15)在  $t\in[1026.5, 1250.0]$  时单孤立子传播的模拟结果.

若定义数值解与精确解在时间  $t=j\Delta t$ , ( $j=0,1,2,\cdots$ )的整体误差为

$$E=\max_j|\text{数值解}\hat{u}-\text{精确解}u(i\Delta x,j\Delta t)|,$$

现在用多辛 Fourier 拟谱格式(15)及 15 点多辛 Preissmann 格式进行数值模拟单孤立子的传播情况, 图 2 给出了在  $t\in[0, 25]$  上不同时刻的整体误差( $E$ )比较结果. 从图中可知, 多辛 Fourier 拟谱格式(15)模

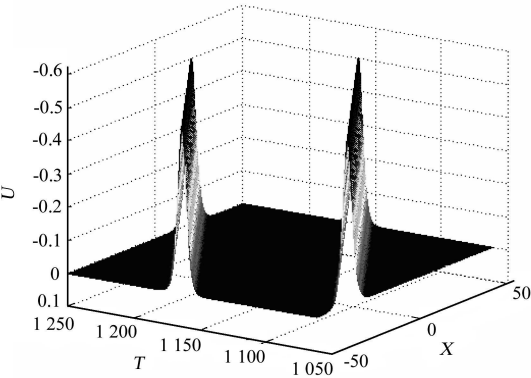


图 1 单孤立子的传播

Fig. 1 The propagation of a soliton

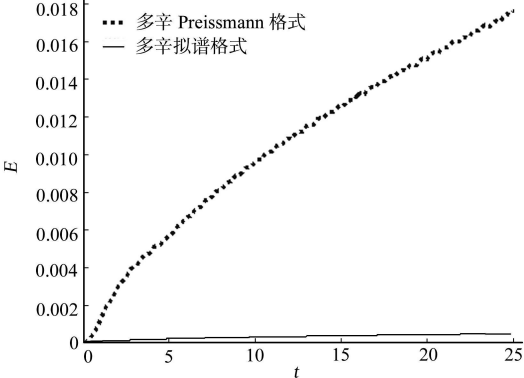


图 2 整体误差比较图

Fig. 2 Comparison of global error

拟孤立子运动的结果明显优于 15 点多辛 Preissmann 格式(14), 整体误差较小.

下面, 接着考虑多辛 Fourier 拟谱格式(15)模拟双孤立子异向传播的情况. 取相同振幅  $A=0.369$ ,

不同初相  $\zeta_0 = 0$  及  $\zeta_0 = -50$ , 此时,  $X_L = -100$ ,  $X_R = 100$ , 时间步长,  $\Delta t = 0.125$ , 空间步长  $\Delta x = 0.5$ . 计算 10 000 步后可发现, Fourier 拟谱格式(15)同样能够很好地模拟双孤立子的碰撞过程. 碰撞后, 两个孤立子保持原来的形状及速度传播, 就好象碰撞没有发生过. 图 3 给出了等幅双孤立子异向传播时在  $t \in [1\ 127.5, 1\ 250.0]$  上的碰撞分离过程.

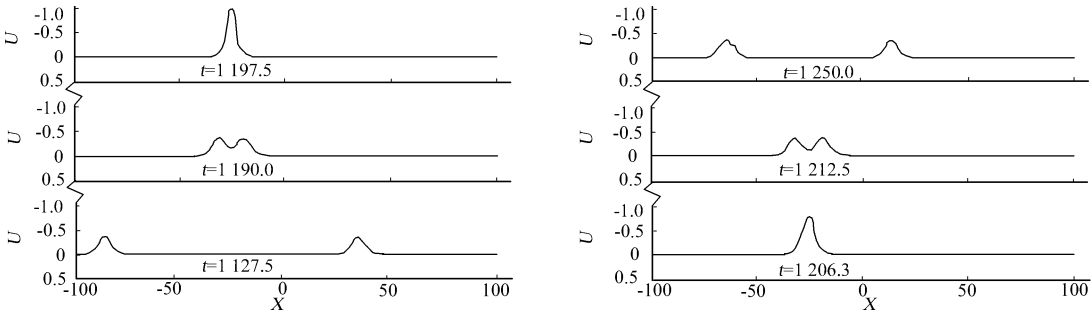


图 3 双孤立子的碰撞分离过程

Fig. 3 The collision process of the two solitons

$\in [1\ 127.5, 1\ 250.0]$  上的碰撞分离过程.

数值结果表明, 本文所构造的多辛 Fourier 拟谱格式明显优于文[ 7] 中的多辛 Preissmann 格式, 能够较好地保持原孤立子的波形, 具有长时间的数值稳定性.

参考文献:

[ 1] BRIDGES T J, REICH S. Multi symplectic integrators: Numerical schemes for Hamiltonian PDEs that conserve symplecticity[J]. Physics Letter A, 2001, 284( 4 5): 184-193.

[ 2] BRIDGES T J. Multi symplectic structures and wave propagation[J]. Math Proc Cam Phil Soc, 1997, 121: 147-190.

[ 3] REICH S. Multi symplectic Runge-Kutta methods for Hamiltonian wave equations[J]. J Comput Phys, 2000, 157( 5): 473-499.

[ 4] BRIDGES T J, REICH S. Multi symplectic spectral discretizations for the Zakharov-Kuznetsov and shallow water equations[J]. Physica D, 2001, 152: 491-504.

[ 5] CHEN Jing bo, QIN Meng-zhao. Multi symplectic Fourier pseudospectral method for the nonlinear Schrödinger equation[J]. Electron Trans Numer Anal, 2001, 12: 193-204.

[ 6] ISLAS A L, SCHÖBER C M. Multi symplectic spectral methods for the Gross-Pitaevski equation[J]. Lect Notes Comp Sci, 2002, 2331: 486-495.

[ 7] 曾文平, 黄浪扬, 秦孟兆. “Good” Boussinesq 方程的多辛算法[J]. 应用数学和力学, 2002, 23( 7): 743-748.

## Multisymplectic Fourier Pseudo-Spectral Algorithm for “Good” Boussinesq Equation

HUANG Lang-yang

(Department of Mathematics, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** By canonical transformation, multisymplectic systems and multisymplectic conservation laws for nonlinear “Good” Boussinesq equation with periodic boundary conditions are obtained. Using Fourier pseudospectral method in spatial direction and mid point Euler method in time direction to the multisymplectic systems, a multisymplectic Fourier pseudospectral scheme is constructed. At the same time, we have also obtained semi-discrete and full discrete multisymplectic conservation laws for the scheme. Numerical experiments show that the multisymplectic Fourier pseudospectral scheme constructed in this paper is effective, and has excellent long time numerical behavior.

**Keywords:** multisymplectic systems; Fourier pseudospectral scheme; nonlinear “Good” Boussinesq equation; numerical experiment

(责任编辑: 黄仲一)