第 28 卷 第 1 期　华 侨 大 学 学 报 (自 然 科 学 版)　Vol. 28　No. 1
2007 年 1 月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Jan. 2007

文章编号: 1000-5013(2007)01-0088-04

行(列)对称矩阵的 LDU 分解与 Cholesky 分解

袁晖坪

(重庆工商大学 理学院, 重庆 400067)

摘要: 提出行(列)转置矩阵与行(列)对称矩阵的概念,研究它们的性质,获得一些新的结果. 给出行(列)对称矩阵的 LDU 分解、Cholesky 分解和三对角分解公式,可极大地减少行(列)对称矩阵的 LDU 分解、Cholesky 分解和三对角分解的计算量与存储量,而且不会丧失数值精度.

关键词: 行(列)转置矩阵; 行(列)对称矩阵; LDU 分解; Cholesky 分解; 三对角分解

中图分类号: O 151.21　　**文献标识码**: A

很多实际问题,都可转化成数学线性问题,进而利用矩阵解决. 许多应用领域(如信息、控制、工程等)中大量出现的都是关于行、列或对角线的对称图象(矩阵),关于行或列对称的矩阵的奇异值分解及 QR 分解的计算量与储存量的节省尤为显著[1-2],不仅短时 Fourier 变换具有对称现象,Gabor 变换、普图、Margenau-Hill 分布、Page 分布及 Rihaczek 分布等[3]均具有零频率轴对称特性,晶体结晶点阵、城区及建筑物的图像上亦有众多典型的对称结构[4]. 线性代数主要讨论了矩阵的转置和对称性,对其他的对称性很少涉及. 文[5-6]研究了矩阵的次转置与次正定性,文[7]研究了左(右或全)转置矩阵. 矩阵的 LDU 分解、Cholesky 分解和三对角分解,在系统论、统计学、线性方程组、最优化问题、特征值问题及工程应用问题中被广泛应用[8-9]. 本文在此基础上,进一步提出了行(列)转置矩阵与行(列)对称矩阵的概念,研究了它们的相应性质,给出了行(列)对称矩阵的 LDU 分解、Cholesky 分解、正交对角分解和三对角分解的公式. 这无论是对于矩阵理论或应用,都是很有意义的. 本文用 $J_n = J$ 表次对角线元素全为 1,其余元素全为 0 的 n 阶方阵; A^T, A^S 与 A^* 分别表矩阵 A 的转置、次转置与伴随阵, $\mathbf{R}^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 实矩阵集. 显然, $J^T = J$, $J^2 = I$, $J^{-1} = J$.

1　行(列)转置矩阵与行列对称矩阵的概念与性质

定义　设 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{m\times n}$,则矩阵 A 的行转置矩阵与列转置矩阵,并记为 A^R 与 A^C. 即

$$A^R = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ a_{m-11} & a_{m-12} & \cdots & a_{m-1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}, \quad A^C = \begin{bmatrix} a_{1n} & a_{1n-1} & \cdots & a_{12} & a_{11} \\ a_{2n} & a_{2n-1} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{mn} & a_{mn-1} & \cdots & a_{m2} & a_{m1} \end{bmatrix}.$$

特别地,若 $A^R = A(A^C = A)$,则 A 称为行(列)对称矩阵;若 $A^R = -A(A^C = -A)$,则称 A 为行(列)反对称矩阵.

定理 1　设 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$,那么,有 (1) $A^R = J_m A$, $A^C = AJ_n$; (2) $(A^R)^T = (A^T)^C$, $(A^C)^T = (A^T)^R$; (3) $(A^R)^S = (A^S)^C$, $(A^C)^S = (A^S)^R$; (4) $(A^R)^C = (A^C)^R$; (5) $(A^R)^R = A$, $(A^C)^C = A$; (6) $(kA)^R = kA^R$, $(kA)^C = kA^C$, k 为实数; (7) 另设 $B \in \mathbf{R}^{m\times n}$,则 $(A\pm B)^R = A^R \pm B^R$, $(A\pm B)^C = A^C \pm B^C$; (8) 另设 $B \in \mathbf{R}^{n\times k}$,则

收稿日期: 2006-05-15
作者简介: 袁晖坪(1958-),男,教授,主要从事矩阵论的研究. E-mail: yhp@ctbu.edu.cn.
基金项目: 重庆市自然科学基金资助项目(CSTS 2005 BB 0243); 重庆市教委科研基金资助项目(3-10-71)

$(AB) = A^R B$, $(AB)^C = AB^C$.

证明　(1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 分别为矩阵的行向量和列向量,则

$$J_m A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_{m-1} \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_m \\ \alpha_{m-1} \\ \cdots \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = A^R,$$

$$AJ_n = \begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \cdots \\ \beta_{n-1}^T \\ \beta_n^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_n^T \\ \beta_{n-1}^T \\ \cdots \\ \beta_2^T \\ \beta_1^T \end{bmatrix}^T = A^C.$$

(2) $(A^R)^T = (J_m A)^T = A^T J_m^T = A^T J_m = (A^T)^C$, $(A^C)^T = (AJ_n)^T = J_n^T A^T = J_n A^T = (A^T)^R$. (3) $(A^R)^S = (J_m A)^S = A^S J_m^S = A^S J_m = (A^S)^C$, $(A^C)^S = (AJ_n)^S = J_n^S A^S = J_n A^S = (A^S)^R$. (4) $(A^R)^C = (J_m A)^C = J_m A J_n = J_m A^C = (A^C)^R$. (5)(7) 显然成立. (8) $(AB)^R = J_m(AB) = (J_m A)B = A^R B$. 类似可证, $(AB)^C = AB^C$.

推论 1　设 $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$, k 为实数,那么,有(1) A, B 若均为行(反)对称矩阵,则 $kA, AB, BA, A \pm B$, $AB \pm BA$ 均为行(反)对称矩阵;(2) 若 A, B 均为列(反)对称矩阵,则 $kA, AB, BA, A \pm B, AB \pm BA$ 均为列(反)对称矩阵.

证明　(1) 若 A, B 为行对称矩阵,则 $A^R = A, B^R = B$,且由定理 1 有

$$(kA)^R = kA^R = kA, \qquad (AB)^R = A^R B = AB,$$
$$(BA)^R = B^R A = BA, \qquad (A \pm B)^R = A^R \pm B^R = A \pm B.$$

所以, $kA, AB, BA, A \pm B$ 为行对称矩阵,因而 $AB \pm BA$ 也为行对称矩阵.

类似可证行反对称矩阵的情形. 同理,可证(2)成立. 显然,行对称矩阵只有 $[B^T \quad (JB)^T]^T$, $[B^T \quad \alpha^T \quad (JB)^T]^T$ 两种类型,其中 $B \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\alpha \in \mathbf{R}^{1 \times n}$;列对称矩阵只 $(B \quad JB)$, $(B \quad \alpha \quad BJ)$ 有两种类型,其中 $B \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\alpha \in \mathbf{R}^{m \times 1}$.

2　行(列)对称矩阵的几种分解

2.1　LDU 分解

定理 2　已知行对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} B \\ J_n B \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n \times n}$, B 的顺序主子式 $\Delta_k \neq 0$, $k, 1, 2, \cdots, n-1$, $L^{-1}BU^{-1} = D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, $d_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$, $k = 1, 2, \cdots, n$, $\Delta_0 = 1$. 其中, $L(U)$ 是单位下(上)三角矩阵,则存在 $L_1 = \begin{bmatrix} L^{-1} & O \\ L^{-1} & -L^{-1}J_n \end{bmatrix}$,使 $L_1 A U^{-1} = \begin{bmatrix} D \\ O \end{bmatrix}$.

证明　$L_1 A U^{-1} = \begin{bmatrix} L^{-1} & O \\ L^{-1} & -L^{-1}J_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ J_n B \end{bmatrix} U^{-1} = \begin{bmatrix} L^{-1}B \\ L^{-1}B - L^{-1}J_n^2 B \end{bmatrix} U^{-1} = \begin{bmatrix} L^{-1}BU^{-1} \\ O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ O \end{bmatrix}$.

定理 3　已知列对称矩阵 $A = (B \quad BJ_n) \in \mathbf{R}^{n \times 2n}$, B 的顺序主子式 $\Delta_k \neq 0$, $k, 1, 2, \cdots, n-1$, $L^{-1}BU^{-1} = D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, $d_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$, $k, 1, 2, \cdots, n$; $\Delta_0 = 1$. 其中, $L(U)$ 是单位下(上)三角矩阵,则存在 $U_1 = \begin{bmatrix} U^{-1} & U^{-1} \\ O & -J_n U^{-1} \end{bmatrix}$,使 $L^{-1}AU_1 = \begin{bmatrix} D \\ O \end{bmatrix}$.

证明　$L^{-1}AU_1 = L^{-1}(B \quad BJ_n) \begin{bmatrix} U^{-1} & U^{-1} \\ O & -J_n U^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{-1}BU^{-1} \\ O \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} D \\ O \end{bmatrix}^T$.

2.2　Cholesky 分解

定理 4 已知行对称矩阵 $A=\begin{bmatrix} B \\ J_m B \end{bmatrix}\in \mathbf{R}^{2n\times n}$,对称正定矩阵 $B=GG^T$(G为下三角可逆矩阵),则存在 $G_1=\begin{bmatrix} G^{-1} & O \\ G^{-1} & -G^{-1}J_n \end{bmatrix}$,使 $G_1A(G^T)^{-1}=\begin{bmatrix} I_n \\ O \end{bmatrix}$.

证明 $G_1A(G^T)^{-1}=\begin{bmatrix} G^{-1} & O \\ G^{-1} & -G^{-1}J_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \\ J_nB \end{bmatrix}(G^T)^{-1}=\begin{bmatrix} G^{-1}B \\ G^{-1}B-G^{-1}J_n^2B \end{bmatrix}(G^T)^{-1}=$
$\begin{bmatrix} G^{-1}B(G^T)^{-1} \\ O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_n \\ O \end{bmatrix}$.

定理 5 已知列对称矩阵 $A=(B\quad BJ_n)\in \mathbf{R}^{n\times 2n}$,对称正定矩阵,$B=GG^T$($G$为下三角可逆矩阵),则存在 $G_1=\begin{bmatrix} (G^T)^{-1} & (G^T)^{-1} \\ O & -J_n(G^T)^{-1} \end{bmatrix}$,使 $G^{-1}AG_1=(I_n\quad O)$.

证明 $G^{-1}AG_1=G^{-1}(B\quad BJ_n)\begin{bmatrix} (G^T)^{-1} & (G^T)^{-1} \\ O & -J_n(G^T)^{-1} \end{bmatrix}=G^{-1}(B(G^T)^{-1}\quad B(G^T)^{-1}-BJ_n^2(G^T)^{-1})$
$=(G^{-1}B(G^T)^{-1}\quad O)=(I_n\quad O)$.

2.3 正交对角分解

定理 6 已知行对称矩阵 $A=\begin{bmatrix} B \\ J_nB \end{bmatrix}\in \mathbf{R}^{2n\times n}$,非奇异阵 B 的正交对角分解为 $P^TBQ=D=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$. 其中,$P,Q$ 为正交矩阵,$\sigma_i>0,i,1,2,\cdots,n$,则存在正交矩阵 $P_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} P^T & P^TJ_n \\ P^T & -P^TJ_n \end{bmatrix}$,使 $P_1AQ=\begin{bmatrix} \sqrt{2}D \\ O \end{bmatrix}$.

证明 由条件及文[8]定理 4.15 可知,存在正交矩阵 P,Q,使 $P^TBQ=D=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$. 其中,$\sigma_i>0,i,1,2,\cdots,n$. 于是,有

$$P_1P_1^T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} P^T & P^TJ_n \\ P^T & -P^TJ_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & P \\ J_nP & -J_nP \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P^TP & O \\ O & P^TP \end{bmatrix}=I_{2n},$$

所以 P_1 为正交矩阵,且

$$P_1AQ=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} P^T & P^TJ_n \\ P^T & -P^TJ_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \\ J_nB \end{bmatrix}Q=\begin{bmatrix} \sqrt{2}P^TBQ \\ O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{2}D \\ O \end{bmatrix}.$$

定理 7 已知列对称矩阵 $A=(B\quad BJ_n)\in \mathbf{R}^{n\times 2n}$,因此有非奇异阵 B 的正交对角分解为 $P^TBQ=D=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$. 其中,$P,Q$ 为正交矩阵,$\sigma_i>0,i,1,2,\cdots,n$,则存在正交矩阵 $Q_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} Q & Q \\ J_nQ & -J_nQ \end{bmatrix}$,使 $PAQ_1=(\sqrt{2}D\quad O)$.

证明 由条件及文[8]定理 4.15 可知,存在正交矩阵 P,Q,使 $P^TBQ=D=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$. 其中,$\sigma_i>0,i,1,2,\cdots,n$. 于是,有

$$Q_1^TQ_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} Q^T & Q^TJ_n \\ Q^T & -Q^TJ_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & Q \\ J_nQ & -J_nQ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q^TQ & O \\ O & Q^TQ \end{bmatrix}=I_{2n}.$$

所以,P_1 为正交矩阵,且

$$P^TAQ_1=\frac{1}{\sqrt{2}}P^T(B\quad BJ_n)\begin{bmatrix} Q & Q \\ J_nQ & -J_nQ \end{bmatrix}=$$
$$(\sqrt{2}P^TBQ\quad O)=(\sqrt{2}D\quad O).$$

2.4 三对角分解

定理 8 已知行对称矩阵 $A=\begin{bmatrix} B \\ J_nB \end{bmatrix}\in \mathbf{R}^{2n\times n}$,$T^{-1}BT=C$,$C\in \mathbf{R}^{n\times n}$为三对角阵. 那么,存在可逆矩阵

$T_1=\begin{bmatrix} T^{-1} & O \\ T^{-1} & -T^{-1}J_n \end{bmatrix}$,使 $T_1AT=\begin{bmatrix} C \\ O \end{bmatrix}$.

证明 $T_1AT=\begin{bmatrix} T^{-1} & O \\ T^{-1} & -T^{-1}J_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \\ J_nB \end{bmatrix}T=\begin{bmatrix} T^{-1}BT \\ O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C \\ O \end{bmatrix}$.

定理 9 **已知行列称矩阵** $A=(B\quad BJ_n)\in\mathbf{R}^{n\times 2n}$, $T^{-1}BT=C$, $C\in\mathbf{R}^{n\times n}$**为三对角阵. 那么,存在可逆矩阵** $T_1=\begin{bmatrix} T & T \\ O & -J_nT \end{bmatrix}$,**使** $T^{-1}AT_1=(C\quad O)$.

证明 $T^{-1}AT_1=T^{-1}(B\quad BJ_n)\begin{bmatrix} T & T \\ O & -J_nT \end{bmatrix}=(T^{-1}BT\quad O)=(C\quad O)$.

3 结束语

综上可以看出,行(列)对称矩阵的 LDU 分解、Cholesky 分解、正交对角分解和三对角分解公式,不仅极大地减少行(列)对称矩阵的 LDU 分解、Cholesky 分解,正交对角分解和三对角分解的计算量与存储量,而且不会丧失数值精度.

参考文献:

[1] 邹红星,王殿军,戴琼海,等. 延拓矩阵的奇异值分解[J]. 科学通报,2000,45(14):1 560-1 562.

[2] 邹红星,王殿军,戴琼海,等. 行(或列)对称矩阵的 QR 分解[J]. 中国科学(A 辑),2002,32(9):842-849.

[3] COHEN L. Time-frequency analysis[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1995: 123-256.

[4] 张三慧. 大学物理学(第 1 册):力学[M]. 2 版. 北京:清华大学出版社,1990:168.

[5] 秦兆华. 关于次对称矩阵与反次对称矩阵[J]. 西南师范学院学报:自然科学版,1985,(1):100-110.

[6] 袁晖坪. 次亚正定矩阵[J]. 数学杂志,2001,21(1):29-32.

[7] 许永平,石小平. 正交矩阵的充要条件与 O 正交矩阵的性质[J]. 南京林业大学学报:自然科学版,2005,29(2):54-56.

[8] 程云鹏,张凯院,徐　仲. 矩阵论[M]. 2 版. 西安: 西北工业大学出版社,2000:225-233.

[9] 姜家辉. 矩阵理论基础[M]. 大连: 大连理工大学出版社,1995:72-162.

LDU Factorization and Cholesky Factorization of Row (Column) Symmetric Matrices

YUAN Hui-ping

(School of Science, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: The concept of row (column) transposed matrix and row (column) symmetric matrix are defined. Their basic properties are studied and some new results are obtained. The formula for the LDU factorization, Cholesky factorization and triple diagonal factorization of row (column) symmetric matrix are obtained. These formula can dramatically reduce the amount of calculation for LDU factorization, Cholesky factorization and triple diagonal factorization of row (column) symmetric matrix, save dramatically the CPU time and memory without loss of any numerical precision.

Keywords: row (column) transposed matrix; row (column) symmetric matrix; LDU factorization; Cholesky factorization; triple diagonal factorization

(责任编辑: 黄仲一)