第28卷 第1期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 28 No. 1
2007年1月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 2007

文章编号: 1000-5013(2007)01-0083-05

区间上拟对称函数的延拓定理

朱剑锋, 黄心中

(华侨大学 数学系, 福建 泉州 362021)

摘要: 探索区间上的 K-拟对称函数可延拓成整个实轴 $\mathbf{R}$ 上拟对称函数的条件,并对其拟对称的偏差界限作进一步的估计,得到比 Lehto 和 Virtanen 研究相应问题更好的结果. 作为应用,文中还进一步估计化分段拟对称函数为整体拟对称函数的偏差.

关键词: 拟共形映照; 拟对称函数; 偏差; 延拓定理

中图分类号: O 174.55 文献标识码: A

1 预备知识

设 $f(z)$ 是上半平面 H 到自身的 K-拟共形映照, Beurling 等[1]证明了 $f(z)|_{z\in\mathbf{R}}=h(x)$ 是实轴 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 上的 M-拟对称函数, 其中, K 仅与 M 有关. 针对这一重要结果, Lehto 等[2]引入了区间 I 上 ρ-拟对称函数的概念, 并研究了将其延拓到实轴 $\mathbf{R}$ 的条件. 本文利用对称性, 在文[2]的基础上, 对拟对称偏差做出更好的估计, 得到下列定理.

定理 1 设 $\varphi(x)$ 为区间 $[0, 1]$ 上的严格增加连续函数, $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, 且 $\varphi(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的 K-拟对称函数, 则可以把 $\varphi(x)$ 连续延拓成 $\mathbf{R}$ 上的 M-拟对称函数. 这里, $M=(K+K^2)^4$.

在研究分段拟对称函数化成整体拟对称函数的问题中, 文[4-5]分别得到一些整体拟对称函数的偏差估计. 利用本文的方法, 可改写成下列的定理.

定理 2 设 $M\geqslant 1$, $f(x)$ 为 $[-1, M]$ 上的实值严格增加连续函数, $f(0)=0$. 如果 $f(x)$ 为区间 $[-1, 0]$, $[0, M]$ 上的 K-拟对称函数, 且对于 $0<t<1$, $\dfrac{1}{K_1}\leqslant\dfrac{f(t)}{|f(-t)|}\leqslant K_1$ 成立, 则 $f(x)$ 是 $[-1, M]$ 上的 K_2-拟对称函数. 这里, $K_2=K_1K(1+K)$.

引理 设 $\varphi(x)$ 为区间 $[0, 1]$ 上的严格增加连续函数, $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, 且 $\varphi(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的 K-拟对称函数. 令 $\tilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\varphi(-x), & -1\leqslant x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $\tilde{\varphi}(x)$ 为 $[-1, 1]$ 上的 K_1-拟对称函数. 这里, $K_1=K^2+K$. 为方便起见, $\tilde{\varphi}(x)$ 仍记为 $\varphi(x)$

证明 设 $-1<x-t<0\leqslant x<x+t<1$, 我们分别讨论以下两种情况.

(Ⅰ) $-1<x-t<0\leqslant x<\dfrac{t}{2}<x+t<1$. 此时, 有 $0<x<t-x<x+t<1$, $\dfrac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)}=\dfrac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)+\varphi(t-x)}$. 因为, $\varphi(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的 K-拟对称函数, $t-x$, $\dfrac{t}{2}$, $x\in[0, 1]$, 所以有 $\dfrac{1}{K}\leqslant\dfrac{\varphi(t-x)-\varphi(\frac{t}{2})}{\varphi(\frac{t}{2})-\varphi(x)}\leqslant K$. 由此可以得到不等式

收稿日期: 2006-05-02
作者简介: 朱剑锋(1980-), 男, 助教, 主要从事函数论的研究. E-mail: flandy@hqu.edu.cn.
基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(Z0511025)

$$(1+K)\varphi(\frac{t}{2})-K\varphi(t-x)\leqslant\varphi(x)\leqslant(1+\frac{1}{K})\varphi(\frac{t}{2})-\frac{1}{K}\varphi(t-x).\tag{1}$$

同理,由$\frac{1}{K}\leqslant\frac{\varphi(x+t)-\varphi(t)}{\varphi(t)-\varphi(t-x)}\leqslant K$, $t-x, t, x+t\in[0,1]$,可以得到

$$(1+\frac{1}{K})\varphi(t)-\frac{1}{K}\varphi(t-x)\leqslant\varphi(x+t)\leqslant(1+K)\varphi(t)-K\varphi(t-x).\tag{2}$$

由式(1),(2)可得

$$(1+\frac{1}{K})[\varphi(t)-\varphi(\frac{t}{2})]\leqslant\varphi(x+t)-\varphi(x)\leqslant(1+K)[\varphi(t)-\varphi(\frac{t}{2})].\tag{3}$$

再由 $\varphi(t-x)+\varphi(x)\leqslant\varphi(t-x)+K\varphi(x)\leqslant(1+K)\varphi(\frac{t}{2})$,以及 $\varphi(t-x)+\varphi(x)\geqslant\varphi(t-x)+\frac{1}{K}\varphi(x)\geqslant(1+\frac{1}{K})\varphi(\frac{t}{2})$,可得

$$(1+\frac{1}{K})\varphi(\frac{t}{2})\leqslant\varphi(t-x)+\varphi(x)\leqslant(1+K)\varphi(\frac{t}{2}).\tag{4}$$

由式(3),(4)可以得到

$$\frac{1}{K^2}\leqslant\frac{(1+\frac{1}{K})[\varphi(t)-\varphi(\frac{t}{2})]}{(1+K)\varphi(\frac{t}{2})}\leqslant\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)}\leqslant\frac{(1+K)[\varphi(t)-\varphi(\frac{t}{2})]}{(1+\frac{1}{K})\varphi(\frac{t}{2})}.$$

再利用

$$1/K\leqslant[\varphi(t)-\varphi(\frac{t}{2})]/[\varphi(\frac{t}{2})-\varphi(0)]\leqslant K,\tag{5}$$

则有 $1/K^2\leqslant[\varphi(x+t)-\varphi(x)]/[\varphi(x)-\varphi(x-t)]\leqslant K^2$. (Ⅱ) $-1<x-t<0<\frac{t}{2}\leqslant x<x+t<1$. 此时,有 $0<t-x<x\leqslant x+t<1$. 因为 $1/K\leqslant[\varphi(x)-\varphi(\frac{t}{2})]/[\varphi(\frac{t}{2})-\varphi(t-x)]\leqslant K$,所以有

$$(1+\frac{1}{K})\varphi(\frac{t}{2})-\frac{1}{K}\varphi(t-x)\leqslant\varphi(x)\leqslant(1+K)\varphi(\frac{t}{2})-K\varphi(t-x).\tag{6}$$

由式(6)可知,有

$$(1+\frac{1}{K})\varphi(\frac{t}{2})\leqslant\varphi(x)+\varphi(t-x)\leqslant(1+K)\varphi(\frac{t}{2}).\tag{7}$$

下面,估计 $\varphi(x+t)-\varphi(x)$ 的上下界. 因为$\frac{t}{2}<x<t$,所以有 $x<\frac{x+t}{2}$. 由 $\varphi(x)$ 的单调性可以知道,$\varphi(x+t)-\varphi(x)\geqslant\varphi(x+t)-\varphi(\frac{x+t}{2})$,又因为 $1/K\leqslant[\varphi(x-t)-\varphi(\frac{x+t}{2})]/[\varphi(\frac{x+t}{2})-\varphi(0)]\leqslant K$,所以 $\varphi(x+t)-\varphi(x)\geqslant\varphi(x+t)-\varphi(\frac{x+t}{2})\geqslant\frac{1}{K}\varphi(\frac{x+t}{2})\geqslant\frac{1}{K}\varphi(x)\geqslant\frac{1}{K}\varphi(\frac{t}{2})$. 另一方面,由于 $1/K\leqslant[\varphi(x+t)-\varphi(t)]/[\varphi(t)-\varphi(t-x)]\leqslant K$,所以$(1+\frac{1}{K})\varphi(t)-\frac{1}{K}\varphi(t-x)\leqslant\varphi(x+t)\leqslant(1+K)\varphi(t)-K\varphi(t-x)$. 且 $\varphi(x+t)-\varphi(x)\leqslant(1+K)\varphi(t)-(1+\frac{1}{K})\varphi(\frac{t}{2})-(K-\frac{1}{K})\varphi(t-x)\leqslant(1+K)\varphi(t)-(1+\frac{1}{K})\varphi(\frac{t}{2})$. 综上所述,有

$$\frac{1}{K}\varphi(\frac{t}{2})\leqslant\varphi(x+t)-\varphi(x)\leqslant(1+K)\varphi(t)-(1+\frac{1}{K})\varphi(\frac{t}{2}).\tag{8}$$

由式(7),(8)可知

$$\frac{\frac{1}{K}\varphi(\frac{t}{2})}{(1+K)\varphi(\frac{t}{2})}\leqslant\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)}\leqslant\frac{(1+K)\varphi(t)-(1+\frac{1}{K})\varphi(\frac{t}{2})}{(1+\frac{1}{K})\varphi(\frac{t}{2})}.$$

即可得$\frac{1}{K(1+k)}\leqslant\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)}\leqslant K(1+K)-1$. 所以, $K_1=\max\{K+K^2, K+K^2-1, K^2\}=K+K^2$,

$\varphi(x)$为$[-1, 1]$上的 K_1-拟对称函数. 引理证毕.

2　主要定理的证明

利用引理, 我们来证明本文的主要结果.

定理 1 的证明. 我们对 $\varphi(x)$进行延拓. 先令 $\psi(x)=\begin{cases}\varphi(x), 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\varphi(-x), -1\leqslant x\leqslant 0,\end{cases}$ 再对任意的 $x\in \mathbf{R}$, 设 $x=2m+t(-1\leqslant t\leqslant 1, m$ 为整数$)$, $\tilde{\varphi}(x)=\tilde{\varphi}(2m+t)=2m+\psi(t)$, 可以得到 $\mathbf{R}$ 上的连续增加奇函数 $\tilde{\varphi}(x)$. 方便起见, $\tilde{\varphi}(x)$仍记为 $\varphi(x)$. 证明分 4 个步骤.

(1) 由引理可以证明 $\varphi(x)$为$[0, 2]$上的 K_1-拟对称函数. 因为, 在区间$[0, 1]$, $[1, 2]$上的 $\varphi(x)$都为 K-拟对称函数. 令 $\varphi(x)=\varphi(x+1)-1(-1\leqslant x\leqslant 1)$, 则在区间$[-1, 0]$, $[0, 1]$上, $\varphi(x)$都为 K-拟对称函数. 又因为 $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, $\varphi(-x)=\varphi(1-x)-1=1-\varphi(1+x)=-\varphi(x)(0\leqslant x\leqslant 1)$. 由引理可以知道, $\varphi(x)$ 为区间$[-1, 1]$上的 $K_1=K+K^2$-拟对称函数. 所以对于 x, $x\pm t\in[0, 2]$, 有 $\frac{1}{K_1}\leqslant \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)}\frac{\varphi(x-1+t)-\varphi(x-1)}{\varphi(x-1)-\varphi(x-1-t)}\leqslant K_1$. 即 $\varphi(x)$为$[0, 2]$上的 K_1-拟对称函数.

(2) 对于 $0<t\leqslant\frac{1}{2}$及 $x\in\mathbf{R}$, 证明$\frac{1}{K_1}\leqslant\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)}\leqslant K_1$. 因为 $x\in\mathbf{R}$, 不妨设 $x=2k+\beta$, $-1\leqslant\beta\leqslant 1$, k 为整数. (i) 当$\frac{-1}{2}\leqslant\beta\leqslant\frac{1}{2}$时. 因为$\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)}=\frac{\varphi(2k+\beta+t)-\varphi(2k+\beta)}{\varphi(2k+\beta)-\varphi(2k+\beta-t)}=\frac{\varphi(\beta+t)-\varphi(\beta)}{\varphi(\beta)-\varphi(\beta-t)}$, 而$\frac{-1}{2}\leqslant\beta+t\leqslant 1$, $-1\leqslant\beta-t\leqslant\frac{1}{2}$. 由引理知道$\frac{1}{K_1}\leqslant\frac{\varphi(\beta+t)-\varphi(\beta)}{\varphi(\beta)-\varphi(\beta-t)}\leqslant K_1$. (ii) 当$-1\leqslant\beta\leqslant\frac{-1}{2}$时. 此时有$\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)}=\frac{\varphi(\beta+t)-\varphi(\beta)}{\varphi(\beta)-\varphi(\beta-t)}=\frac{\varphi(\beta+2+t)-\varphi(\beta+2)}{\varphi(\beta+2)-\varphi(\beta+2-t)}$. 因为 $1\leqslant\beta+2\leqslant\frac{3}{2}$, $1\leqslant\beta+2+t\leqslant$, $\frac{1}{2}\leqslant\beta+2-t\leqslant\frac{3}{2}$, 由第 1 步可知$\frac{1}{K_1}\leqslant\frac{\varphi(\beta+2+t)-\varphi(\beta+2)}{\varphi(\beta+2)-\varphi(\beta+2-t)}\leqslant K_1$. (iii) 当$\frac{1}{2}\leqslant\beta\leqslant 1$ 时, 有$\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)}=\frac{\varphi(\beta+t)-\varphi(\beta)}{\varphi(\beta)-\varphi(\beta-t)}$. 因为$\frac{1}{2}\leqslant\beta+t\leqslant\frac{3}{2}$, $0\leqslant\beta-t\leqslant 1$, 由第 1 步可知, $\frac{1}{K_1}\leqslant\frac{\varphi(\beta+t)-\varphi(\beta)}{\varphi(\beta)-\varphi(\beta-t)}\leqslant K_1$. 所以, 对于 $0<t\leqslant\frac{1}{2}$及 $x\in\mathbf{R}$, 成立$\frac{1}{K_1}\leqslant\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)}\leqslant K_1$.

(3) 当 $0<t\leqslant 2$, $x\in\mathbf{R}$ 时, 我们证明$\frac{1}{K_1^4}\leqslant\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)}\leqslant K_1^4$ 成立. 对于 $0<t\leqslant 1$, $x\in\mathbf{R}$, 由第 2 步的结论有

$$\varphi(x+t)-\varphi(x+\frac{t}{2})\leqslant K_1[\varphi(x+\frac{t}{2})-\varphi(x)]\leqslant K_1^4[\varphi(x)-\varphi(x-\frac{t}{2})], \tag{9}$$

$$\varphi(x+\frac{t}{2})-\varphi(x)\leqslant K_1[\varphi(x)-\varphi(x-\frac{t}{2})]\leqslant K_1^2[\varphi(x-\frac{t}{2})-\varphi(x-t)]. \tag{10}$$

将式(9), (10)相加得$\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)}\leqslant K_1^2$. 再由

$$\varphi(x+t)-\varphi(x+\frac{t}{2})\geqslant\frac{1}{K_1}[\varphi(x+\frac{t}{2})-\varphi(x)]\geqslant\frac{1}{K_1^2}[\varphi(x)-\varphi(x-\frac{t}{2})], \tag{11}$$

$$\varphi(x+\frac{t}{2})-\varphi(x)\geqslant\frac{1}{K_1}[\varphi(x)-\varphi(x-\frac{t}{2})]\geqslant\frac{1}{K_1^2}[\varphi(x-\frac{t}{2})-\varphi(x-t)] \tag{12}$$

相加, 可得$\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)}\geqslant\frac{1}{K_1^2}$. 跟上面讨论相同, 对于 $0<t\leqslant 2$, $x\in\mathbf{R}$, 有$\frac{1}{K_1^4}\leqslant\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)}\leqslant K_1^4$.

(4) 当 $t>2$, $x\in\mathbf{R}$ 时, 我们证明$\frac{1}{2}\leqslant\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)}\leqslant 2$. 由于 $t>2$, 不妨设 $t=2m+\beta$, $m\geqslant 1$ 为整数, $0<\beta\leqslant 2$. 那么, $\varphi(x+t)-\varphi(x)=2m+\varphi(\beta+x)-\varphi(x)\geqslant 2m$. 另一方面, $\varphi(x+t)-\varphi(x)=2m+\varphi(\beta+x)-\varphi(x)\geqslant 2m+\varphi(x+2)-\varphi(x)=2m+2$. 同理, 有 $\varphi(x)-\varphi(x-t)=\varphi(x)+\varphi(t-x)=2m+\varphi(x)-\varphi(x-\beta)\geqslant 2m$, $\varphi(x)-\varphi(x-t)=2+\varphi(x)+\varphi(\beta-x)\leqslant 2m+\varphi(x)+\varphi(2-x)\leqslant 2m+2$. 所以, $2m\leqslant\varphi(x+$

$t)-\varphi(x)\leqslant 2m+2$, $2m\leqslant\varphi(x)-\varphi(x-t)\leqslant 2m+2\ (m\geqslant 1)$. 上式说明, 当 $t>2$ 时, $\frac{1}{2}\leqslant\frac{2m}{2m+2}\leqslant\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-r)}\leqslant\frac{2m+2}{2m}\leqslant 2$.

综上所述, 对于任意的 $0<t<\infty$, $x\in\mathbf{R}$, 有 $\frac{1}{M}\leqslant\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)}\leqslant M$, $M=\max\{(K+K^2)^4, 2\}=(K+K^2)^4$. 定理 1 证毕.

设给定连续增加函数的定义域是一段关于原点的非对称区间 $[-1, M]$, $M\geqslant 1$. $f(x)$ 分别是 $[-1, 0]$, $[0, M]$ 上的分段 K-拟对称函数, 文[2, 4-5]研究过把该分段拟对称函数化成整体拟对称函数的条件. 利用引理的方法, 可以证明定理 2. 即我们假设 $-1<x-t<0\leqslant x<x+t<M$, 然后分两种情况来进行讨论.

(Ⅰ) $-1<x-t<0\leqslant x<\frac{t}{2}<x+t<M$. 由条件可得

$$(1+\frac{1}{K})f(t)-\frac{1}{K}f(t-x)\leqslant f(x+t)\leqslant(1+K)f(x)-Kf(t-x),\tag{13}$$

$$\frac{1}{K}f(t-x)-(1+\frac{1}{K})f(\frac{t}{2})\leqslant -f(x)\leqslant Kf(t-x)-(1+K)f(\frac{t}{2}).\tag{14}$$

将式(13), (14)相加, 得到

$$(1+\frac{1}{K})[f(t)-f(\frac{t}{2})]\leqslant f(x+t)-f(x)\leqslant(1+K)[f(t)-f(\frac{t}{2})].\tag{15}$$

$$\frac{1}{K_1}f(\frac{t}{2})\leqslant f(x)-f(x-t)\leqslant K_1(1+K)f(\frac{t}{2}).\tag{16}$$

由式(15), (16)可得

$$\frac{1}{K^2K_1}\leqslant\frac{1}{K_1K}\frac{f(t)-f(\frac{t}{2})}{f(\frac{t}{2})}\leqslant\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)}\leqslant K_1(K+1)\frac{f(t)-f(\frac{t}{2})}{f(\frac{t}{2})}\leqslant K_1K(1+K).$$

(Ⅱ) $-1<x-t<0<\frac{t}{2}\leqslant x<x+t<M$. 此时, $0<t-x\leqslant x<x+t<M$, 不等式 $\frac{1}{K}\leqslant\frac{f(x+t)-f(t)}{f(t)-f(t-x)}\leqslant K$ 成立, 即

$$(1+\frac{1}{K})f(t)-\frac{1}{K}f(t-x)\leqslant f(x+t)\leqslant(1+K)f(t)-Kf(t-x).$$

同理, 有

$$(1+\frac{1}{K})f(\frac{t}{2})-\frac{1}{K}f(t-x)\leqslant f(x)\leqslant(1+K)f(\frac{t}{2})-Kf(t-x).\tag{17}$$

所以, 有

$$f(x+t)-f(x)\leqslant(1+K)f(t)-(1+\frac{1}{K})f(\frac{t}{2}).\tag{18}$$

再利用 $\frac{1}{K}\leqslant\frac{f(x+t)-f(\frac{x+t}{2})}{f(\frac{x+t}{2})-f(0)}\leqslant K$, 则

$$f(x+t)-f(x)\geqslant\frac{1}{K}f(\frac{x+t}{2})\geqslant\frac{f(x)}{K}\geqslant\frac{f(\frac{t}{2})}{K}.\tag{19}$$

由式(18), (19)可知

$$\frac{1}{K}f(\frac{t}{2})\leqslant f(x+t)-f(x)\leqslant(1+K)f(t)-(1+\frac{1}{K})f(\frac{t}{2}).\tag{20}$$

下面寻找 $f(x)-f(x-t)$ 的上下界. 由式(17)可知

$$(1+\frac{1}{K})f(\frac{t}{2})-\frac{1}{K}f(t-x)-f(x-t)\leqslant(1+K)f(\frac{t}{2})-Kf(t-x)-f(x-t).$$

由此可得$(1+\frac{1}{K})f(\frac{t}{2})+(\frac{1}{K_1}-\frac{1}{K})f(t-x)\leqslant f(x)-f(x-t)\leqslant(1+K)f(\frac{t}{2})+(K_1+K)f(t-x)$.

(a) 当 $K_1\geqslant K$ 时, $\frac{1}{K_1}-\frac{1}{K}\leqslant 0$, $f(t-x)\leqslant f(\frac{t}{2})$. 所以,

$$(1+\frac{1}{K_1})f(\frac{t}{2})\leqslant f(x)-f(x-t)\leqslant(1+K_1)f(\frac{t}{2}),\tag{21}$$

从而

$$\frac{1}{K(1+K_1)}\leqslant\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)}\leqslant K_1(1+K).$$

(b) 当 $K_1\leqslant K$ 时, 此时$\frac{1}{K_1}-\frac{1}{K}\geqslant 0$, 所以

$$(1+\frac{1}{K})f(\frac{t}{2})\leqslant f(x)-f(x-t)\leqslant(1+K)f(\frac{t}{2}),$$

再利用式(21)就得到

$$\frac{1}{K(1+K)}\leqslant\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)}\leqslant K(K+1)-1.$$

综上所述, $K_2=\max\{K^2K_1, K_1K(K+1), K_1(1+K), K(1+K_1), K(1+K)\}=K_1K(K+1)$. 定理 2 证毕.

Heinonen 等[3] 及文[4-5] 都对定理 2 的问题进行研究, 最好的结果为 $K_2\leqslant(1+K)KK_1+K+K_1$. 显然, 本文中的 K_2 是较好的估计.

参考文献:

[1] BEURLING A, AHLFORS L. The boundary correspondence under quasiconformal mappings[J]. Acta Math, 1956, 96: 125-142.

[2] LEHTO O, VIRTANEN K I. Quasiconfomal mappings in the plane[M]. New York: Springer-Verlag, 1973: 89-90.

[3] HEINONEN J, HINKKANEN A. Quasiconformal maps between compact polyhedera are quasisymmetric[J]. Indiana University Math J, 1996, 45: 997-1 019.

[4] 黄心中. 分段与整体拟对称函数之间的关系[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 1999, 20(1): 1~5.

[5] 王朝祥, 黄心中. 分段拟对称为整体拟对称函数的偏差估计[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2003, 24(4): 346-348.

The Extension Theorem of Quasisymmetric Function on the Interval

ZHU Jian-feng, HUANG Xin-zhong

(Department of Mathematics, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The interval quasi-symmetric function can be extended to the whole X axis one is studied, the better distortion than Lehto and Virtanen′s is obtained. As an application, sharper research also made on piecewise quasi-symmetric function that can be extended into the whole one.

Keywords: quasiconformal mapping; quasisymmetric function; distortion; extension theorem

(责任编辑: 黄仲一)