

文章编号: 1000-5013(2007)01-0008-03

用 MATLAB 求解 Butterworth 最优传递函数

李钟慎, 吕 亮

(华侨大学 机电及自动化学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 采用 MATLAB 语言编写函数 `bwden`, 通过主程序调用该函数可求出任意阶 Butterworth 最优传递函数分母多项式的系数, 绘制出 Butterworth 最优传递函数的极点分布图, 阶跃响应曲线及波德图. 8 阶 Butterworth 最优传递函数的求解和仿真表明, 可有效且简便地用 MATLAB 求解 Butterworth 最优传递函数.

关键词: Butterworth 滤波器; 最优传递函数; 函数 `bwden`; 仿真

中图分类号: TP 13; O 245

文献标识码: A

MATLAB 是美国 Math Works 公司开发的一个功能强大的数学软件包, 它集矩阵计算、数值分析、信号处理和图形显示等多种功能于一身^[1]. 其程序的表示方法是自然的, 问题和解答的表达形式几乎和它们的数学表达式完全相同, 没有复杂的语句和指令. 而且, MATLAB 是一种交互式的系统, 其基本数据单元是不需要指定维数的矩阵. 因此, 解决数值计算问题, 使用 MATLAB 要比使用诸如 Basic, Fortran 和 C 语言的效率要高好多倍^[2]. 本文引入 MATLAB 语言, 利用其使用方便、运算高效、内容丰富等优点, 对 Butterworth 最优传递函数进行求解和仿真.

1 Butterworth 最优传递函数的求解

1.1 基本思想

Butterworth 滤波器是一种全极点配置的低通滤波器, 具有本质的稳定性^[3,4]. 设 $H(s)$ 为 Butterworth 滤波器的传递函数, 它的极点配置的规律是, n 个极点均匀、共轭地分布在 s 左半平面的, 以原点为圆心、 ω_c 为半径的半圆周上, 相邻的两个极点之间的相位差为 π/n rad^[5-6]. (1) 当 n 为奇数时, Butterworth 最优传递函数为

$$H(s) = 1 / [(\frac{s}{\omega_c} + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (\frac{s^2}{\omega_c^2} + 2(\cos \theta_k) \frac{s}{\omega_c} + 1)], \quad \theta_k = k\pi/n. \quad (1)$$

(2) 当 n 为偶数时, Butterworth 最优传递函数为

$$H(s) = 1 / [\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} (\frac{s^2}{\omega_c^2} + 2(\cos \theta_k) \frac{s}{\omega_c} + 1)], \quad \theta_k = [(2k-1)\pi]/2n. \quad (2)$$

令 $\bar{s} = s/\omega_c$, 即得 Butterworth 最优传递函数标准型为

$$H(\bar{s}) = \frac{1}{[\bar{s}^n + a^{n-1}\bar{s}^{n-1} + \dots + a^1\bar{s} + 1]}.$$

根据式(1), (2), 本文编写一个求取 Butterworth 最优传递函数分母多项式系数的函数 `bwden`, 并在主程序 `buttsm.m` 中调用函数 `bwden`, 可获得 Butterworth 最优传递标准型函数. 利用 MATLAB 提供命令函数 `polar`, `step` 和 `bode`, 分别画出它的极点分布图、阶跃响应特性及波德图. 程序的处理流程图, 如图 1 所示.

收稿日期: 2006-05-12

作者简介: 李钟慎(1971-), 男, 副教授, 主要从事 CAD 技术与工业自动化的研究. E-mail: lzcycw@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(A0410020)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1.2 函数 bwden

n 为 Butterworth 最优传递函数阶数, 分母多项式系数矩阵用 den 表示. 函数 bwden 的程序如下:

```
function den= bwden(n)
    if n= 1,
        P= [ 1, 1];
    else if (fix(n/2)* 2)= n,
        P= 1;
    for k= 1: 1: n/2,
        P1= [ 1, 2* cos((2* k- 1)* pi/(2* n)), 1];
        P= conv(P, P1);
    end
else
    P= [ 1, 1];
    for k= 1: 1: (n- 1)/ 2,
        P1= [ 1, 2* cos(k* pi/n), 1];
        P= conv(P, P1);
    end
end
den= P;
```

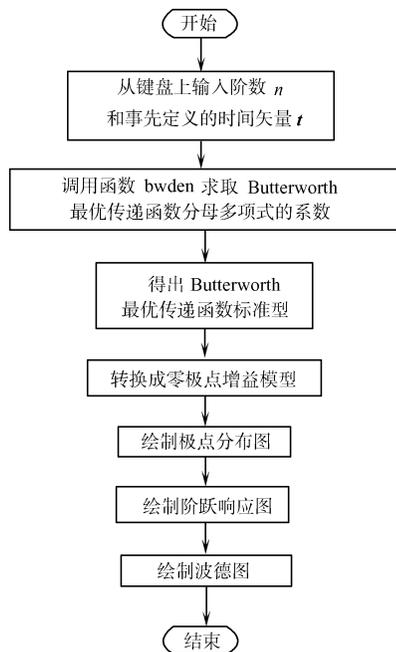


图 1 程序处理流程图

Fig.1 Flow chart of program

1.3 主程序

主程序 buttism.m 由以下 3 部分构成. (1) 从键盘上输入数据. 为了使程序更加通用, 采用以下命令从键盘上输入数据. $n= \text{input}(n$ 为输入阶数); $t= \text{input}(t$ 为输入事先定义的时间矢量); 函数 step 可以自动确定时间轴分度并自动生成图形, 但实际应用中生成的图形并不能完整反映图形特点. 所以, 根据需从键盘上输入时间矢量 t , 可以较完整地得到 Butterworth 最优传递函数阶跃响应图. (2) 求取 Butterworth 最优传递函数标准型及零极点增益模型. 可用命令 $\text{den}= \text{bwden}(n)$, $G= \text{tf}(1, \text{den})$. 求出 Butterworth 最优传递函数标准型, 再将其转变为零极点增益模型, 其命令为 $[z, p, k]= \text{tf2zp}(1, \text{den})$. (3) 极点分布图、阶跃响应曲线和波德图的绘制. 利用 MATLAB 提供的命令函数 polar, step 和 bode, 分别在 3 张图上画出它的极点分布图、阶跃响应曲线和波德图, 具体程序如下:

```
h1= figure;
polar( angle(p), abs(p), 'x' )
h2= figure;
step( 1, den, t)
[x0, y0, w]= bode( G);
h3= figure;
subplot(2, 1, 1), semilogx( w, 20* log10(x0(:)))
subplot(2, 1, 1), semilogx( w, y0(:))
```

2 仿真实例

下面以 8 阶 Butterworth 最优传递函数的求解和仿真过程为例, 说明此程序的使用方法和有效性. 在 MATLAB 命令窗口中键入 buttism 命令, 根据屏幕上的提示分别输入 8 和 [0: 0.01: 30], 在屏幕上可显示如图 2 所示的结果. 该程序所绘制的 8 阶 Butterworth 最优传递函数的极点分布图、阶跃响应曲线, 以及波德图, 如图 3 所示.

```
den =
Columns 1 through 8
1.0000 5.1258 13.1371 21.8462 25.6884 21.8462 13.1371 5.1258
Column 9
1.0000
Transfer function
1
-----
s 8 +5.126 s 7 +13.14 s 6 +21.85 s 5 +25.69 s 4 +21.85 s 3 +13.14 s 2 +5.126 s +1
Z=
Empty matrix: 0-by-1
P=
-0.1951+0.9808i
-0.1951-0.9808i
-0.5556+0.8315i
-0.5556-0.8315i
-0.8315+0.5556i
-0.8315-0.5556i
-0.9808+0.1951i
-0.9808-0.1951i
k=
1
```

图 2 屏幕上显示的结果

Fig.2 Results provided on the screen

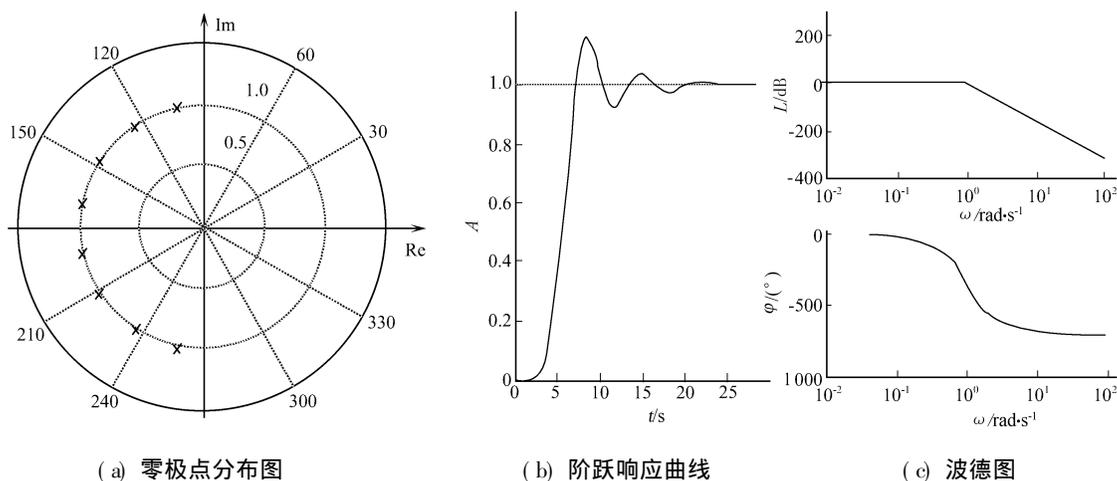


图3 8阶 Butterworth 最优传递函数图示

Fig. 3 Diagrams of 8th order Butterworth optimal transfer function

3 结束语

MATLAB 语言具有强大的数学运算与仿真绘图的能力, 计算过程简单可靠、方便实用, 提高了分析与研究的效率. 仿真结果证明了此种方法的可靠性, MATLAB 语言已广泛应用于现代控制系统的分析与设计之中.

参考文献:

- [1] 张志涌. 精通 MATLAB 6.5 版[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2003: 310-358.
- [2] 薛定宇. 反馈控制系统设计与分析——MATLAB 语言应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000: 93-195.
- [3] 王永初. Butterworth 滤波器在过程控制中的应用(II)[J]. 工业仪表与自动化装置, 1995, (1): 10-13
- [4] 孙增圻. 系统分析与控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 1994: 201-203.
- [5] JACKSON L B. Digital filters and signal processing[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1989: 76-92.
- [6] KATSUHIKO O, 绪方唯彦. 现代控制工程[M]. 卢伯英, 译. 4 版. 北京: 电子工业出版社, 2003: 200-268.

The Application of MATLAB to Evaluate the Butterworth Optimal Transfer Function

LI Zhong-shen, LÜ Liang

(College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: The function `bwden` was programmed in MATLAB environment. Writing a program to call the function in order that the denominator polynomial coefficients of Butterworth optimal transfer function could be obtained, the poles distributing diagram, step response curve and Bode diagram of Butterworth optimal transfer function were plotted. The calculation and simulation of 8th order Butterworth optimal transfer function indicated it could be evaluated efficiently and effectively in Matlab environment.

Keywords: Butterworth filter; optimal transfer function; function `bwden`; simulation

(责任编辑: 黄仲一)