第 27 卷　第 4 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 27　No. 4
2006 年 10 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Oct. 2006

文章编号　1000-5013(2006)04-0412-03

制造系统负荷配置的非线性优化

张　义　平

(苏州市职业大学机电工程系, 江苏 苏州 210016)

摘要　基于排队理论, 建立制造系统负荷分配的非线性优化模型. 该模型以服务负荷为目标函数, 包括关于在制品状态的 3 个不等式约束. 设计一种优化变量转换方法, 并经适当的约束条件合并, 将该非线性模型转换为凸优化模型. 推导给出该凸优化模型对应的拉格朗日函数及 KKT 条件, 并引入凸优化内点法作为负荷分配的有效计算工具. 实例计算结果表明, 模型的优化结果能保证充分利用设备的生产能力及最低的在制品库存, 同时凸优化内点算法具有迭代次数少、收敛速度快的优点. 实际应用中, 可以将非线性的复杂的优化问题凸性化, 从而得到其最优解.

关键词　负荷配置, 排队理论, 凸优化, 制造系统, 非线性优化模型

中图分类号　TH 165; TB 114.1　　　文献标识码　A

关于制造系统的负荷分配问题, 已有很多研究报道. 文[1]把负荷平衡作为负荷分配的目标函数, 采用线性规划方法求解. 文[2]应用改进极大消去法, 以系统流通时间作为目标函数, 采用最速下降法为计算工具, 进行 FMS 系统的负荷分配研究. 由于排队模型考虑了系统中的各种随机因素, 能够细致描述系统内部的各种复杂关系, 从而能从概率和统计的角度分析和优化制造系统的性能. 因此, 本文首先基于排队理论, 建立制造系统负荷分配的非线性的优化模型, 然后, 应用凸优化方法求解.

1　负荷配置优化模型的建立及求解

1.1　负荷配置优化模型的建立

把待加工的在制品看成顾客, 设备看成服务台, 则每一个工作站都可以视为一个随机服务的排队模型. 定义 λ_i 为第 i 个工作站在制品的输入速率; μ_i 为第 i 个工作站设备的服务速率; W_i 为第 i 个工作站在制品的平均等待时间(包括加工时间); D_i 为第 i 个工作站在制品的排队等待时间(不包括加工时间); Q_i 为第 i 个工作站排队的平均在制品数量. 在这样的制造系统中, 假设不考虑设备故障因素, 则系统的负荷轻重, 即比值 $\sum_{i=1}^{n}\beta_i \cdot (\mu_i/\lambda_i)$ (n 为制造系统中的工作站数量, β_i 为加权系数) 的大小对系统的服务质量影响较大. 如果 $\sum_{i=1}^{n}\beta_i \cdot (\mu_i/\lambda_i)$ 太小, 生产线处于饥饿状态, 设备的利用率太低; 反之, 如果 $\sum_{i=1}^{n}\beta_i \cdot (\mu_i/\lambda_i)$ 太大, 又会导致排队等待加工的工件数量增加, 占用较多的存储空间, 造成存储费用的增长. 因此, 对制造系统的负荷 $\sum_{i=1}^{n}\beta_i \cdot (\mu_i/\lambda_i)$ 进行优化设计, 使整个系统处于有序运行的最佳状态, 在制造系统的设计中就显得尤为重要. 本文讨论的制造系统有 n 个并行的工作站, 设计每条线上有关制品的 3 个上限参数 $W_{i,\max}$, $Q_{i,\max}$, $D_{i,\max}$; 最低的, 在制品输入速率限制 $\lambda_{i,\max}$, 以及 n 条线上工作站的服务速率总和限制 $\mu_{\max}$. 建立排队系统的优化模型[3]为 $\min \sum_{i=1}^{n}\beta_i \cdot (\mu_i/\lambda_i)$, 约束条件是 $\lambda_i \geqslant \lambda_{i,\max}$, $\sum_{i=1}^{n}\mu_i \leqslant \mu_{\max}$, $W_i = 1/(\mu_i - \lambda_i) \leqslant W_{i,\max}$, $D_i = \lambda_i/\mu_i(\mu_i - \lambda_i) \leqslant D_{i,\max}$, $Q_i = \lambda_i^2/\mu_i(\mu_i - \lambda_i) \leqslant Q_{i,\max}$. 系统的优化变量为 λ_i, $\mu_i \in R_{++}$ $(i = 1, L, n)$, 优化目标为生产线负荷量 $\sum\beta_i \cdot (\mu_i/\lambda_i)$ 最小, 满足 $(4n+1)$ 个不等式约束. 目标函数中

收稿日期　2006-04-11

作者简介　张义平(1964-), 男, 副教授, 主要从事先进制造技术与控制理论的研究. E-mail: zhyp3189@163.com

基金项目　江苏省教育厅自然科学基金资助项目(05KID460198)

的 β_i 为对第 i 个工作站赋予的加权值，可以根据设备的性能、加工精度、加工成本等因素来确定．目标函数和不等式约束函数都是广义多项式，不是凸函数，所以这是一个几何优化问题而不是凸优化问题．

1.2 模型转换

为了利用凸优化的优良特性求解优化问题，设计变量转换，将排队系统的优化模型转化为凸优化模型．令 $x_i=\log(\mu_i/\lambda_i)$；$x_{n+i}=\log(\mu_i-\lambda_i)$，$x_i>0$，$x_{n+i}\in\mathbf{R}$，$i=1,n$；$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,L,x_{2n}]^{\mathrm{T}}$．即有 $(\mu_i/\lambda_i)=\mathrm{e}^{x_i}$，$\mu_i-\lambda_i=\mathrm{e}^{x_{n+i}}$．将优化模型中的部分约束条件等效合并，可等价表示为 $\min f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathrm{e}^{x_i}$，其约束条件是，$\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{x})=\mathrm{e}^{-x_{n+i}}-W_{i,\max}+1\leqslant 1$，$\boldsymbol{c}_{n+i}(\boldsymbol{x})=\mathrm{e}^{-(x_i+x_{n+i})}-D_{i,\max}+1\leqslant 1$，$\boldsymbol{c}_{2n+i}(\boldsymbol{x})=\lambda_{i,\min}\mathrm{e}^{-(x_i+x_{n+i})}-Q_{i,\max}+1\leqslant 1$，$\mathrm{e}^{x_{n+i}}/(\mathrm{e}^{x_i}-1)\geqslant\lambda_{i,\min}$，$\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot(\mathrm{e}^{x_{n+i}}/(\mathrm{e}^{x_i}-1))\leqslant\mu_{\max}$，$i=1,L,n$．利用对数函数为一增量函数的特点，对其进行变换，可以得到变换优化模型为 $\min f^{\$}(x)=\log(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathrm{e}^{x_i})$．模型的约束条件是，$\boldsymbol{c}_i^{\$}(\boldsymbol{x})=\log(\mathrm{e}^{-x_{n+i}}+a_i)\leqslant 0$，$\boldsymbol{c}_{n+i}^{\$}(\boldsymbol{x})=\log(\mathrm{e}^{-(x_i+x_{n+i})}+a_{n+i})\leqslant 0$，$\boldsymbol{c}_{2n+i}^{\$}(\boldsymbol{x})=\log(\lambda_{i\min}\mathrm{e}^{-(x_i+x_{n+i})}+a_{2n+i})\leqslant 0$，$\dfrac{\mathrm{e}^{x_{n+i}}}{\mathrm{e}^{x_i}-1}\geqslant\lambda_{i,\min}$，$\sum_{i=1}^{n}x_i\dfrac{\mathrm{e}^{x_{n+i}}}{\mathrm{e}^{x_i}-1}\leqslant\mu_{\max}$，$i=1,L,n$．经过这样的约束条件合并和变量转换，上面的变换优化模型仍然很难求解．但常数向量 $\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,L,a_{3n}]^{\mathrm{T}}\geqslant 0$，则可证明上述的优化模型一个凸优化模型，易于求解．

1.3 拉格郎日函数及 KKT 条件的推导

在常数向量 $\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 的条件下，上述的变换优化模型满足 2 个条件．(1) 目标函数 $f^{\$}(\boldsymbol{x})$ 和不等式约束函数 $\boldsymbol{c}_i^{\$}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{c}_{n+i}^{\$}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{c}_{2n+i}^{\$}(\boldsymbol{x})(i=1,L,n)$ 都是连续的二次可微函数，且都是凸函数．(2) 最优点处满足严格约束限制条件．因此，模型满足最优解存在的 KKT 条件[4]，即存在最优解．对于上述变换优化模型的凸优化问题，引入松弛向量 $\omega=[\omega_1,L,\omega_{3n}]^{\mathrm{T}}>_k 0$，可得到对应的拉格朗日函数为 $\mathrm{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\eta,\omega)=f^{\$}(x)-\eta\log\omega-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{c}^{\$}(\boldsymbol{x})+\omega)$．其上式中，$\eta>0$ 为罚因子，$\boldsymbol{y}=[y_1,L,y_{3n}]^{\mathrm{T}}>_k 0$ 为拉格朗日乘子向量，$\boldsymbol{c}^{\$}(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{c}_1^{\$}(\boldsymbol{x}),L,\boldsymbol{c}_{3n}^{\$}(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}$．令拉格朗日函数的偏导等于零，则对应的 KKT 条件为 $\nabla_x L=\nabla\boldsymbol{f}^{\$}(\boldsymbol{x})-\nabla\boldsymbol{c}^{\$}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=0$，$\nabla_y L=\boldsymbol{c}^{\$}(\boldsymbol{x})+\omega=0$，$\nabla_\omega L=-\eta\boldsymbol{W}^{-1}+\boldsymbol{Y}=0$．其中，$\nabla\boldsymbol{f}^{\$}(\boldsymbol{x})$，$\nabla\boldsymbol{c}^{\$}(\boldsymbol{x})$ 为其对应函数的雅可比矩阵，$\boldsymbol{W}=\mathrm{diag}(\omega_1,L,\omega_{3n})$，$\boldsymbol{W}^{-1}=\mathrm{diag}(1/\omega_1,L,1/\omega_{3n})$，$\boldsymbol{Y}=\mathrm{diag}(y_1,L,y_{3n})$．

1.4 内点法求解凸优化模型

1.4.1 罚因子的选取　用 Newton 迭代算法求解，为保证快速收敛，令 $\eta=\dfrac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\omega}{k}\left(\dfrac{1-\delta}{10+\delta}\right)^2$，$\dfrac{1}{\delta}=\max\left(1,(\varepsilon-1)^{-1}\max\limits_{i\in[n]}\dfrac{\Delta y_i}{y_i},(\varepsilon-1)^{-1}\max\limits_{i\in[n]}\dfrac{\Delta\omega_i}{\omega_i}\right)$[5]．其中，$k$ 为迭代次数，ε 为停止控制常数，其他参数的定义同上．

1.4.2 搜索方向的确定　应用牛顿法计算搜索方向 $\Delta\boldsymbol{x}$，$\Delta\varepsilon$，$\Delta\boldsymbol{y}$，则有

$$\begin{bmatrix}\mathrm{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & 0 & -A(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\\ 0 & \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{W}\\ A(\boldsymbol{x}) & I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}\\ \Delta\omega\\ \Delta\boldsymbol{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\nabla\boldsymbol{f}^{\$}(\boldsymbol{x})+A(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\ \eta\boldsymbol{e}-\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}\boldsymbol{e}\\ -\boldsymbol{c}^{\$}(\boldsymbol{x})-\omega\end{bmatrix}.$$

在上式中，$\mathrm{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\nabla^2\boldsymbol{f}^{\$}(\boldsymbol{x})-\sum_{i=1}^{3n}y_i\nabla^2\boldsymbol{c}^{\$}(\boldsymbol{x})$，$A(\boldsymbol{x})=\nabla\boldsymbol{c}^{\$}(\boldsymbol{x})$．$\nabla^2\boldsymbol{f}^{\$}(\boldsymbol{x})$，$\nabla^2\boldsymbol{c}_j^{\$}(\boldsymbol{x})$ 是二次可微函数 $f(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{c}_j^{\$}(\boldsymbol{x})$ 的 Hessian 矩阵，$\boldsymbol{e}=(1,L,1)^{\mathrm{T}}$．

1.4.3 确定当前迭代步长　对于非二次型的凸优化问题，选取迭代步长仅仅为了保证某些优化变量为正值是不够的，为此必须引入价值函数[5]，即

$$P_\eta(z)=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\omega+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{c}^{\$}(\boldsymbol{x})+\omega\|^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial\boldsymbol{c}^{\$}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\nabla\boldsymbol{f}^{\$}(\boldsymbol{x})\right\|^2-\eta\sum_{i=1}^{3n}\log(y_i\omega_i).$$

上式中，$\boldsymbol{z}=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega]$，其他参数定义同上．迭代步长应满足 $\gamma_1\alpha|\nabla P_\eta(z)\mathrm{d}z|\leqslant P_\eta(z)-P_\eta(z+\alpha\mathrm{d}z)\leqslant\gamma_2\alpha|\nabla P_\eta(z)\mathrm{d}z|$．其中，$\gamma_1$，$\gamma_2$ 为两个常量，$0<\gamma_1<\gamma_2<1$．

1.4.4 迭代求解　根据以上分析和计算，可迭代为 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{x}^{(k)}+\alpha^{(k)}\Delta\boldsymbol{x}^{(k)}$，$\omega^{(k+1)}=\omega^{(k)}+\alpha^{(k)}\Delta\omega^{(k)}$，$\boldsymbol{y}^{(k+1)}=\boldsymbol{y}^{(k)}+\alpha^{(k)}\Delta\boldsymbol{y}^{(k)}$．

1.4.5 算法的终止准则　在本文的计算中，迭代算法终止准则的选取是，保证对偶问题的最优解尽量接近原问题的最优解．因此，在可能约束全部满足的条件下，取对偶间隙为[6]

$$\mathrm{Gap}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{2\mid f(\boldsymbol{x}) - (f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{3n} \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{c}_i^{\$}(\boldsymbol{x}))\mid}{\mid f(\boldsymbol{x})\mid + \mid (f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{3n} \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{c}_i^{\$}(\boldsymbol{x}))\mid} \leqslant \frac{-\sum_{i=1}^{3n} \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{c}_i^{\$}(\boldsymbol{x}))}{\mid f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n} \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{c}_i^{\$}(\boldsymbol{x})\mid}.$$

2 计算实例

考虑到 $n=4$, $m=1$, $\beta_1=1$, $\beta_2=0.8$, $\beta_3=1.2$, $\beta_4=1.5$ 的制造系统, 其限制条件为 $Q_{i,\max}=0.2$, $W_{i,\max}=1$, $D_{i,\max}=0.7$, $\lambda_{1,\min}=0.5$, $\lambda_{2,\min}=0.4$, $\lambda_{3,\min}=0.6$, $\lambda_{4,\min}=0.8$, $\mu_{\max}=7$, $i=1,2,3,4$. 将以上参数代入变换优化模型, 可以得到该排队系统的凸优化模型 $\min f(\boldsymbol{x}) = \log(\sum_{i=1}^{4} \mathrm{e}^{x_i})$, 模型的约束条件为 $\boldsymbol{c}_i^{\$}(\boldsymbol{x}) = \log(\mathrm{e}^{-x_{4+i}} + a_i) \leqslant 0$, $\boldsymbol{c}_{4+i}^{\$}(\boldsymbol{x}) = \log(\mathrm{e}^{-(x_i + x_{4+i})} + a_{4+i}) \leqslant 0$, $\boldsymbol{c}_{8+i}^{\$}(\boldsymbol{x}) = \log(\lambda_{i,\min}\mathrm{e}^{-(x_i + x_{4+i})} + a_{8+i}) \leqslant 0$, $\boldsymbol{a} = (0,0,0,0,0.3,0.3,0.3,0.3,0.8,0.8,0.8,0.8)^{\mathrm{T}} \geqslant 0$, $i=1,2,3,4$. 经过 3 s 的两次迭代后, Matlab 给出计算结果: $\lambda_1=0.5040$, $\lambda_2=0.4353$, $\lambda_3=0.6432$, $\lambda_4=0.8349$, $\mu_1=1.5141$, $\mu_2=1.4452$, $\mu_3=1.7484$, $\mu_4=2.2923$. 所以, 工作站的最优负荷 $\sum_{i=1}^{4} \beta_i \cdot (\mu_i/\lambda_i) = 13.0405$.

3 结束语

由上述分析及计算, 可见本文基于排队理论, 建立了设备负荷优化配置模型. 由于模型中考虑了系统中各种随机因素的影响, 并且从概率和统计两方面分析和优化制造系统的性能, 所得优化结果比较合理, 能保证充分地利用设备的生产能力, 保证制造系统中在制品库存最低. 利用凸优化技术求解工程实际优化问题, 迭代次数少、耗时短, 可保证获得全局最优解. 因此, 对于难于求解的非线性的优化问题, 可以先将其凸性化, 然后再求解.

参 考 文 献

1 史海波, 张丽娟, 薛劲松. 柔性制造系统的负荷分配及路径规划方法[J]. 控制理论与应用, 1994, 11(4): 477~482

2 张志英. FMS 中加工设备负荷分配算法研究[J]. 北京理工大学学报(自然科学版), 2002, 22(4): 151~155

3 Visncmadham N, Narahari Y. Penformance modeling of automated manufacturing systems[M]. Cambridge: Yrentice-Hall, 1992. 315~340

4 Scholkopf B, Smola A. Learning with kernels[M]. Cambridge: MIT Press, 2002. 149~186

5 Vanderbei R J, Shanno D F. Interior-point methods for noncenvex nonlinear programming: Orderings and higher-order methods[J]. Mathematicd Progrcmming, 2000, 87: 303~316

6 Vial J P. Computational experience with a primal-dual IPM for smooth convex programming[J]. Optimization Methods and Software, 1994, 3: 285~316

Non-Linear Optimization of Load Allocation in a Manufacturing System

Zhang Yiping

(Department of Mechanical and Electrical Engineering, Suzhou Vocational Unviersity, 210016, Suzhou, China)

Abstract Based on the queuing theory, a nonlinear optimization model is proposed, which has the service load as its objective function and includes three inequality constraints of work-in-progres (WIP). A novel transformation of optimization variables is also devised and the constraints are properly combined so as to make this model into a convex one, from which the Lagrangian function and the Karush-Kuhn-Tucker (KKT) conditions are derived. The interior-point method for convex optimization is presented here as a computationally efficient tool. Finally, this model is evaluated on a real example, from which such conclusions are reached that the optimum result can ensure the full utilization of machines and the least amount of WIP in manufacturing systems; the interior-point method needs fewer iterations with significant computational savings; and it is possible to make nonlinear and complicated optimization problems convexified so as to obtain the optimum.

Keywords load allocation, queuing theory, convex optimization, manufacturing systems, non-linear optimization model